# SEIZMIČKA ANALIZA KONSTRUKCIJA

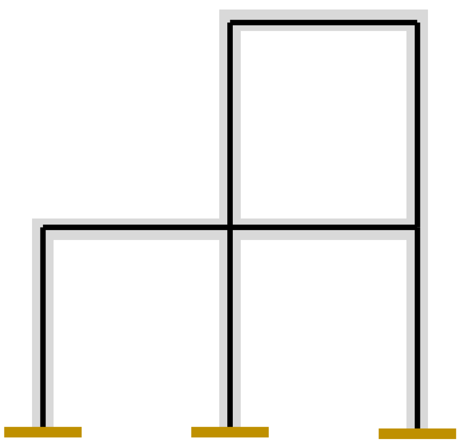
**Univerzitet u Novom Sadu**
**Fakultet tehničkih nauka**
**Departman za građevinarstvo i geodeziju**
**Katedra za konstrukcije**
**Prof dr. Andrija Rašeta**
**Kabinet: LG209**
**Email: araseta@uns.ac.rs, araseta@gmail.com**

# **Dinamika konstrukcija**

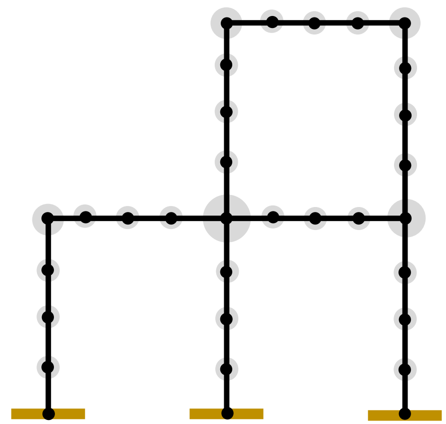
Rekapitulacija osnovnih jednačina za linearno-elastičnu seizmičku analizu konstrukcija

# Dinamički modeli

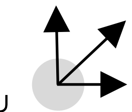
**Kontinualno raspodeljene mase**



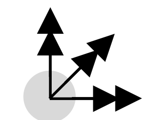
**Diskretno raspodeljene mase**

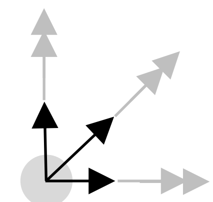


**Masa**
Mera inertnosti pri translatornom kretanju

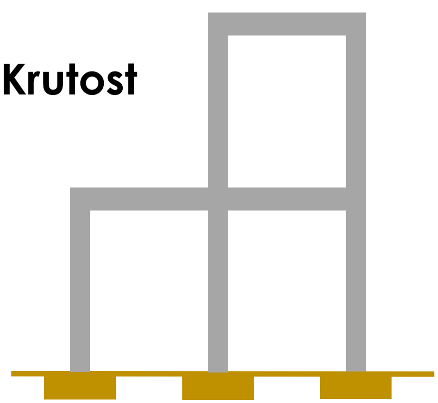


**(Maseni) moment inercije**
Mera inertnosti pri obrtanju





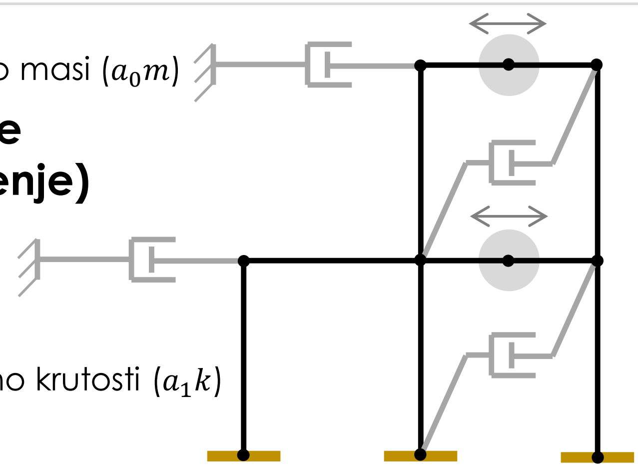
**Krutost**



**Viskozno prigušenje (Rayleigh-jevo prigušenje)**

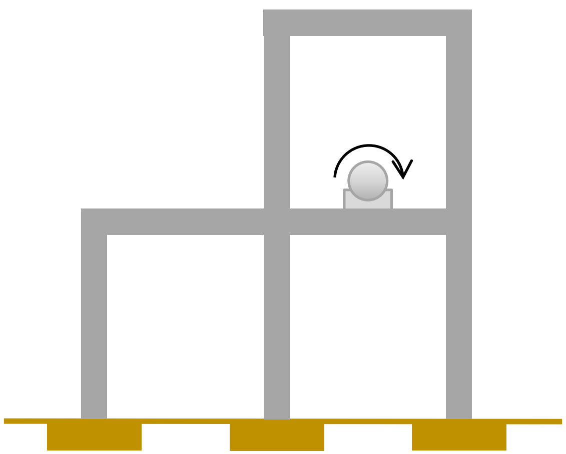
Proporcionalno masi $(a_0 m)$

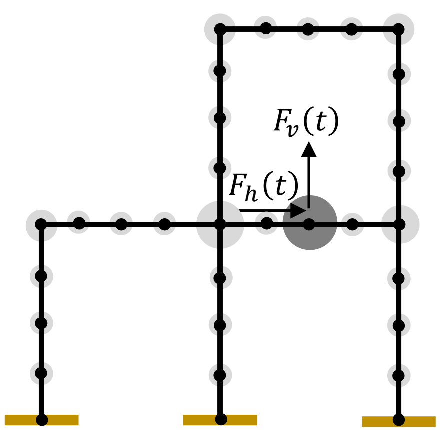
Proporcionalno krutosti $(a_1 k)$



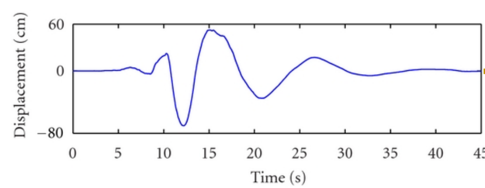
# Dinamički modeli

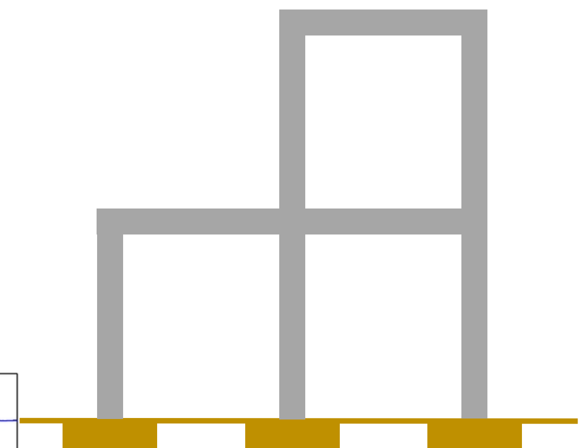
**Harmonijska sila**

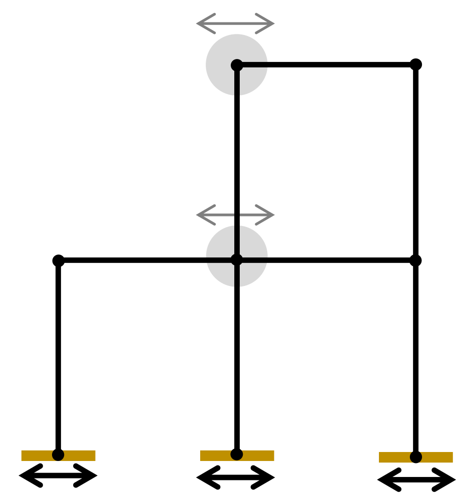





**Prinudno pomeranje osnove**



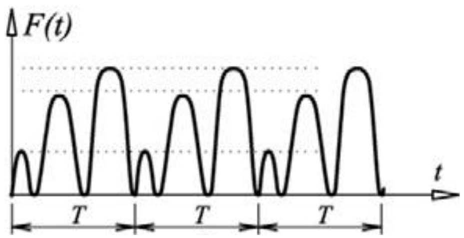





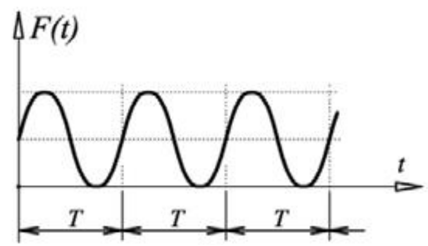
# Dinamički modeli

**Dinamička dejstva se odlikuju promenom intenziteta u toku vremena pri kojem se uticaj nastalih inercijalnih sila ne može zanemariti pa je neophodno da se vrši dinamička analiza odgovora sistema**

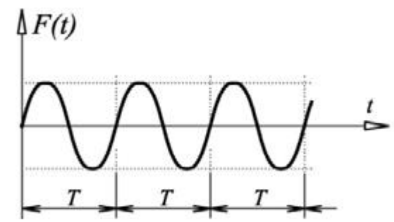
**Periodično dejstvo**
Ponavlja se u jednakim vremenskim intervalima



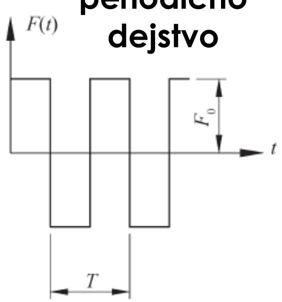

**Harmonijsko periodično dejstvo**
Amplituda sile se menja po harmonijskoj funkciji sinusa ili kosinusa
Poseban slučaj periodičnog dejstva




**Oscilatorno dejstvo**
Srednja vrednost harmonijskog periodičnog dejstva iznosi nula

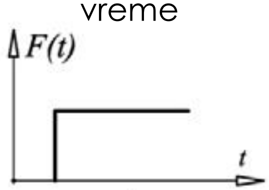



**Neharmonijsko periodično dejstvo**

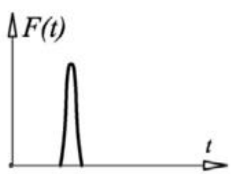



**Udarno dejstvo** – Naglo naneto

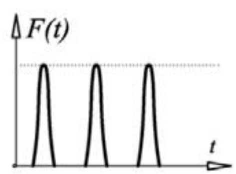
Ostaje duže vreme



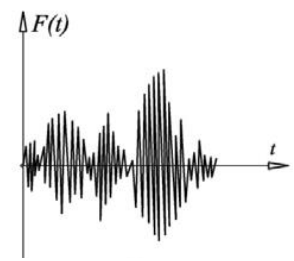

Impuls
Deluje veoma kratko vreme




Serija impulsa
Periodično promenljivo



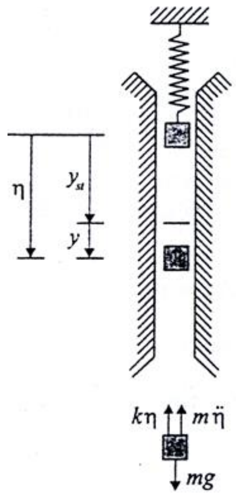

**Slučajna (stihijska, stohastička) dejstva**
Kroz vreme se menja nepravilno
Aperiodično dejstvo




**Dinamičko temperaturno dejstvo** – npr. pri dejstvu požara mogu sa se jave inercijane sile
**Dinamičko pomeranje oslonaca** – npr. pri dejstvu **zemljotresa** (proizvoljno pomeranje oslonaca)

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije (oscilacije)**




masa $m$ ... [masa … kg]
krutost $k$ ... [sila/dužina … N/m … kg/s$^2$]

**SDOF**
**Single-Degree-Of-Freedom**

- Linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$$\boldsymbol{m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0} \qquad \boldsymbol{\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0}$$

**Komentar:**
svaki mehanički elastični sistem vibrira oko svog statičkog ravnotežnog položaja

  - gde je $\omega$ svojstvena (ili prirodna) ugaona frekvencija ili <u>svojstvena kružna frekvencija</u>

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{k/m}} \ \ [\mathbf{rad/s}] \text{ ili } [\mathbf{1/s}]$$

**Komentar:**
*k* i *m* su prirodne karakteristike sistema

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

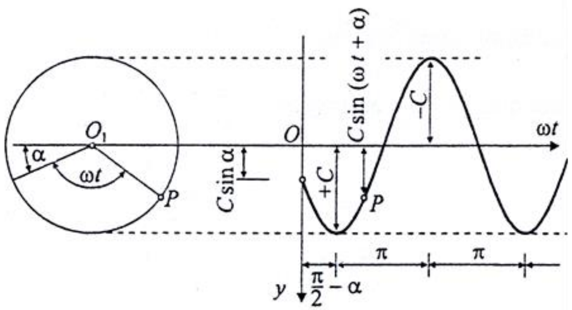
- **Slobodne neprigušene vibracije**
  - Rešenje difrencijalne jednačne

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + y_0\cos(\omega t)$$

**Komentari:**
- Dva harmonijska kretanja (jer su trigonometrijske funkcije istovremeno i harmonijske) koja imaju istu svojstvenu kružnu frekvenciju, a različite amplitude
- Harmonijske slobodne neprigušene vibracije

ili

$$y(t) = C\sin(\omega t + \alpha)$$




**Komentar:**
Periodično, harmonijsko, neprigušeno i oscilatorno kretanje

- gde su
  - amplituda vibracija

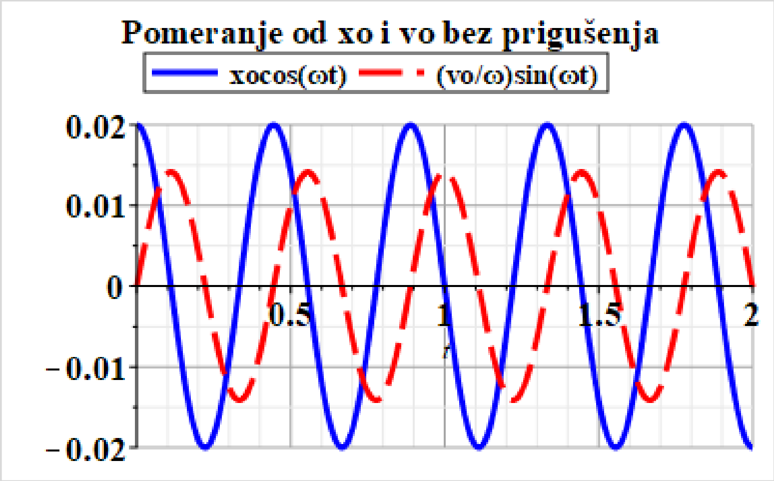
$$C = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y_0^2}$$

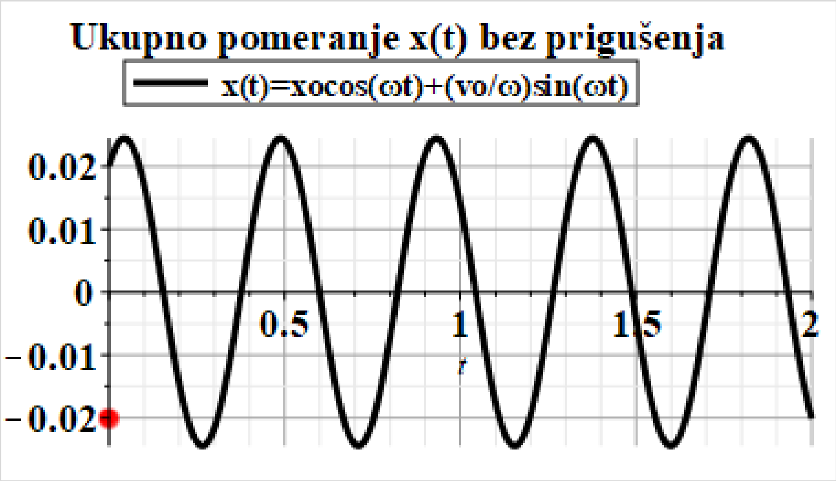
  - i fazni ugao $\quad tg(\alpha) = \dfrac{y_0\omega}{v_0}$

**Komentari:**
- $\omega$ i $T$ ne zavise od početnih uslova i predstavljaju nepromenljive karakteristike sistema (zavise od krutosti i mase dinamičkog modela)
- $C$ i $\alpha$ zavise od početnih uslova

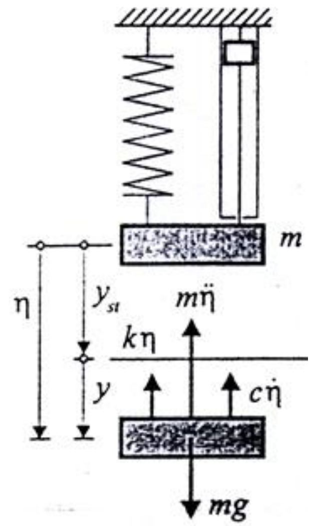
# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije**
  - Period svojstvenih vibracija: $\boldsymbol{T = 2\pi/\omega[\mathrm{s}]}$
  - Svojstvena frekvencija: $\boldsymbol{f = 1/T = \omega/2\pi[\mathrm{Hz}]}$
  - Tehnička frekvencija: $\boldsymbol{n = 60f = 60/T[\mathrm{cik/min}]}$
  - Kretanje $y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + y_0\cos(\omega t)$ se sastoji od dva dela
    - Proporcionalno $\cos(\omega t)$ i zavisi od početnog pomeranja $y_0$
    - Proporcionalno $\sin(\omega t)$ i zavisi od početne brzine $v_0$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

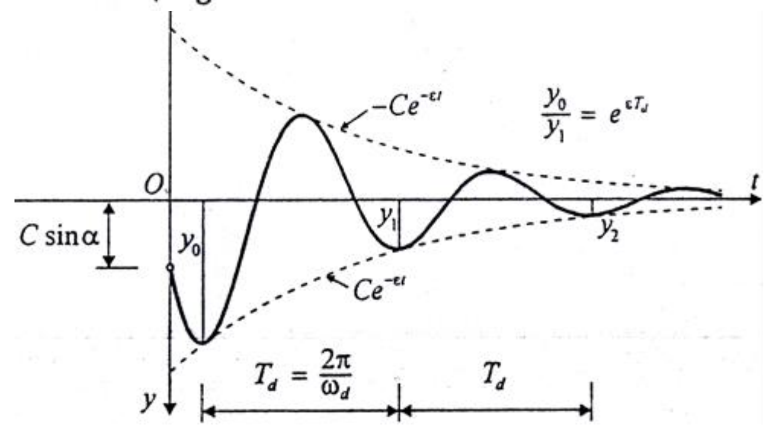



Viskozno prigušenje (proporcionalno brzini)
$c$ … [masa/vreme … kg/s]

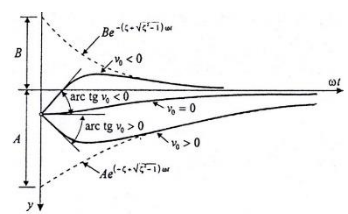
- **Slobodne prigušene vibracije**
  - Diferencijalna jednačina kretanja

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

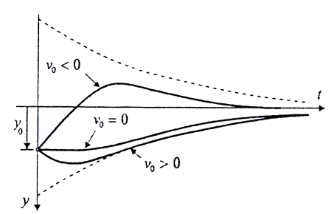
    - gde je koeficijent prigušenja $\varepsilon = c/(2m)$
  - Priroda rešenja zavisi od prigušenja i razlikuju se tri slučaja




    - **Prvi slučaj: $\varepsilon < \omega$**
      - **Malo ili podkritično prigušenje**
      - **Uobičajeno kod građevinskih konstrukcija**
    - Drugi slučaj: $\varepsilon > \omega$
      - Nadkritično prigušenje



    - Treći slučaj: $\varepsilon = \omega$
      - Kritično prigušenje



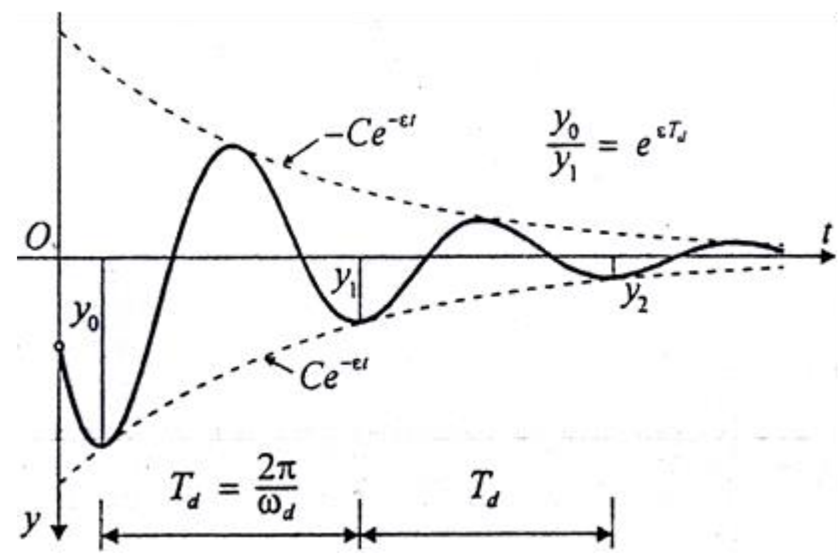
# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Slobodne prigušene vibracije**
  - Prvi slučaj: $\varepsilon < \omega$
    - Rešenje difrencijalne jednačne

$$\boldsymbol{y(t) = e^{-\varepsilon t}\left(\frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + y_0\cos(\omega_d t)\right)}$$

    - ili

$$\boldsymbol{y(t) = Ce^{-\varepsilon t}\sin(\omega_d t + \alpha)}$$




**Komentari:**
- Aperiodično kretanje jer se vremenom maksimalna pomeranja od ravnotežnog položaja smanjuju
- Harmonijsko kretanje oscilatornog karaktera jer je funkcija sinusa harmonijska, a interval vremena koji prođe između dve susedne amplitude istog znaka uvek je isti i iznosi $T_d$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Slobodne prigušene vibracije**
  - Prvi slučaj: $\varepsilon < \omega$; $\zeta < 1$
    - Amplituda

$$Ce^{-\varepsilon t}$$

gde je $$C = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_d}\right)^2 + y_0^2}$$

Fazni ugao

$$tg(\alpha) = \frac{y_0 \omega}{v_0 + \varepsilon y_0}$$

- Kružna frekvencija

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}[\mathrm{rad/s}]$$

Period

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}[\mathrm{s}]$$

Frekvencija

$$f_d = \frac{1}{T_d} = f\sqrt{1-\zeta^2}[\mathrm{Hz}]$$

- Relativno prigušenje

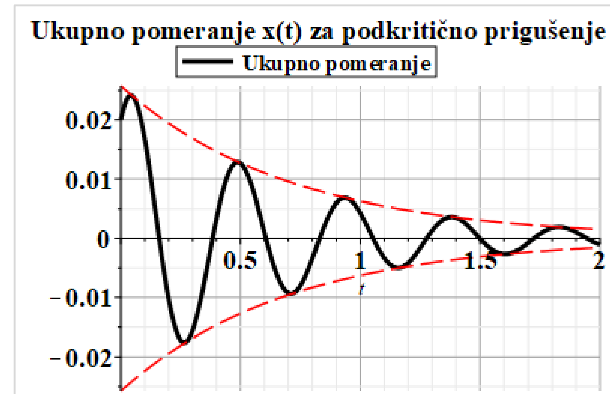
$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{c_{kr}}$$

Kritično prigušenje

$$c_{kr} = 2m\omega = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega}$$

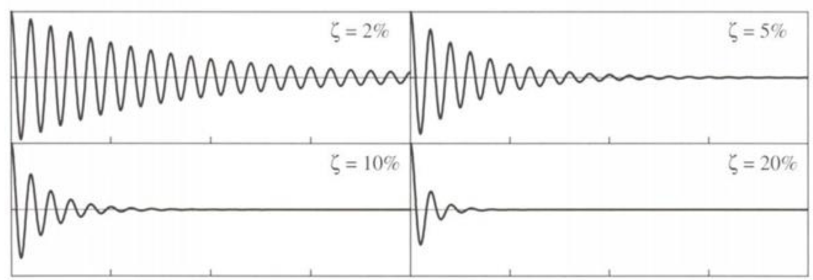
# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Slobodne prigušene vibracije**
  - Prvi slučaj: $\zeta < 1$


  - Relativno prigušenje

| Nivo naprezanja | Vrsta konstrukcije | Relativno prigušenje $\zeta = \frac{\varepsilon}{\omega}$ |
|---|---|---|
| Naprezanja manja od 50% granice tečenja | a) Cevovodi i mašinska oprema | 0.01 – 0.02 |
| | b) Zavarene konstrukcije, prethodno napregnuti beton i armirani beton sa armaturom u obe zone preseka | 0.02 – 0.03 |
| | c) Armirani beton sa dosta prslina | 0.03 – 0.05 |
| | d) Čelične konstrukcije sa vijcima ili zakivcima, drvene konstrukcije | 0.05 – 0.07 |
| Naprezanja nešto manja od granice tečenja | a) Cevovodi i mašinska oprema | 0.02 – 0.03 |
| | b) Zavarene konstrukcije i dobro prednapregnuti beton | 0.05 – 0.07 |
| | c) Delimično prednapregnuti beton | 0.07 – 0.10 |
| | d) Armirani beton | 0.07 – 0.10 |
| | e) Zakovane ili vijcima povezane čelične konstrukcije, drvene konstrukcije povezane zavrtnjima | 0.10 – 0.15 |
| | f) Drvene konstrukcije povezane žlebovima | 0.15 – 0.20 |




**Komentari:**
- Periodi $T$ i $T_d$ se vrlo malo razlikuju
- Amplituda se vrlo brzo priguši

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Proizvoljno promenljiva sila – Duhamel-ov integral**
  - Za linearno ponašanje sistema važi superpozicija, pa dobijamo izraz za ukupno pomeranje u sledećem obliku (integral konvolucije ili integral superpozicije ili Duhamel-ov integral)

$$\boldsymbol{y(t)=\int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

Reagovanje sistema na jedinični impuls

$$g(t)=\frac{1}{m\omega}\sin(\omega t)$$

$$g(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_d t)$$

  - Ukoliko postoje početni uslovi jednačina kretanja glasi:
    - bez prigušenja ($\zeta=0$)

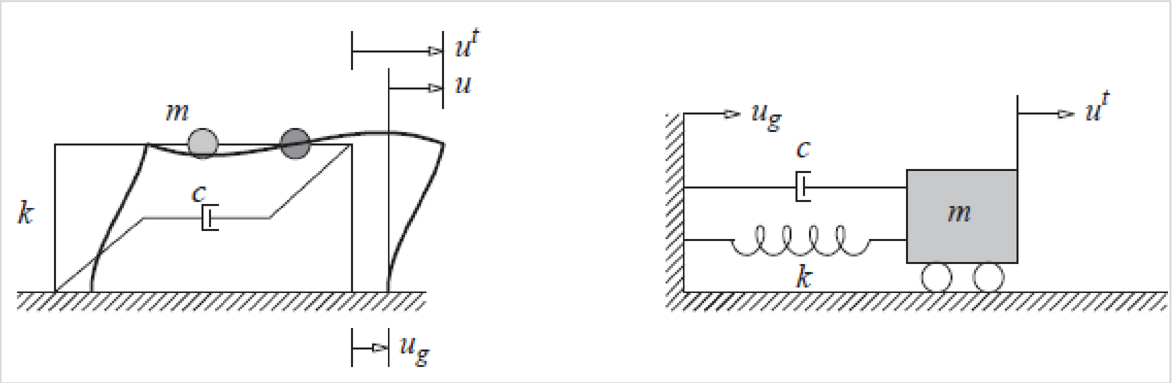
$$\boldsymbol{y(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)+y_0\cos(\omega t)+\frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau}$$

    - sa prigušenjem ($0<\zeta<1$)

$$\boldsymbol{y(t)=e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{v_0+\zeta\omega y_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)+y_0\cos(\omega_d t)\right)+\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)}sin\left[\omega_d(t-\tau)\right]d\tau}$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)**




  - **Inercijalna sila** $m\ddot{u}^t$ je proporcionalna apsolutnom ubrzanju $\ddot{u}^t$
  - **Sila prigušenja** $c\dot{u}$ je proporcionalna relativnoj brzini $\dot{u}$ (unutrašnje viskozno prigušenje)
  - **Sila elastičnog otpora** $ku$ koji pruža konstrukcija u pravcu kretanja mase je proporcionalna relativnom pomeranju $u$
  - Pomeranje konstrukcije kao krutog tela iznosi $u_g$ (pomeranje osnove)
  - Dejstvo zemljotresa se najčešće uvodi preko vremenskog zapisa ubrzanja tla (**akcelerogram**)

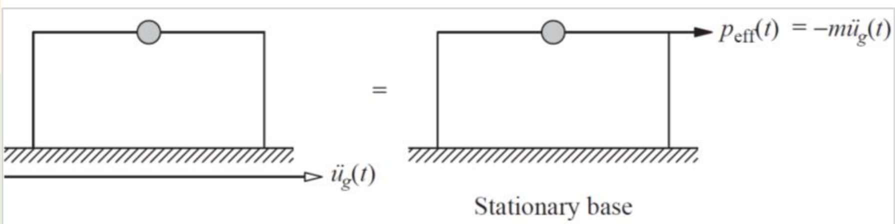
# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)**
  - Ukupno pomeranje u odnosu na početni položaj (apsolutno pomeranje mase) $u^t = u_g + u$
  - Diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$m\ddot{u}^t + c(\dot{u}^t - \dot{u}_g) + k(u^t - u_g) = 0 \qquad m(\ddot{u}_g + \ddot{u}) + c\dot{u} + ku = 0$$

  - i nakon sređivanja sledi

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g = p_{eff} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g$$




**Komentar:**
**Problem se svodi na prinudne prigušene vibracije usled proizvoljno promenljive sile $p_{eff} = -m\ddot{u}_g$ (tzv. efektivna sila zemljotresa)**

  - **Prethodni zaključak važi i za diskretne sisteme sa više stepeni slobode (biće komentarisano kasnije)**

**Komentar:**
Diferencijalna jednačina kretanja može da se prikaže i na drugi način, tj. u sledećem obliku

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u}^t + ku^t = c\dot{u}_g + ku_g$$

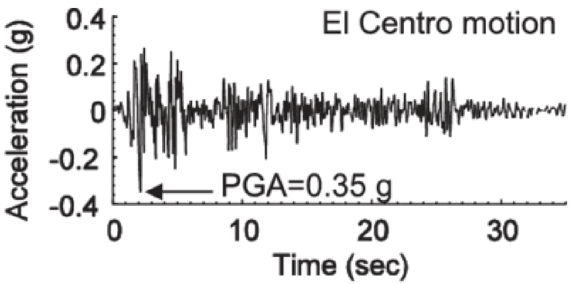
koji se, zbog toga što se zemljotresno dejstvo obično zadaje u vidu akcelerograma, retko primenjuje

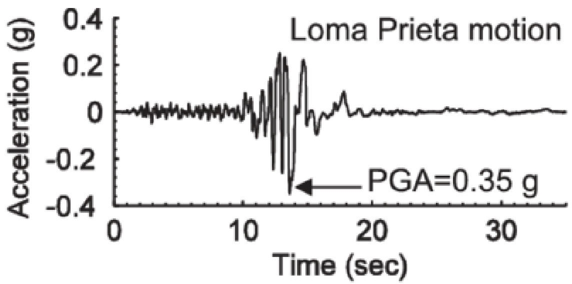
# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

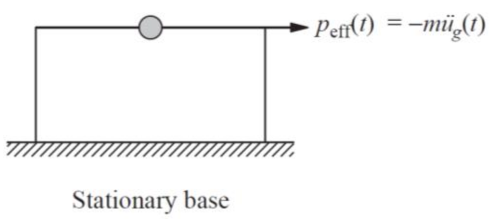
- **Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)**
  - Kod zemljotresnog dejstva uobičajeno je da se usvoje homogeni početni uslovi i podkritično prigušenje (uobičajeno za građevinske konstrukcije). Rešenje za proizvoljno promenljivu silu $p_{eff} = -m\ddot{u}_g$ može da se odredi primenom Duhamel-ovog integrala

$$\boldsymbol{u(t) = -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau}$$

  - Integral može da se odredi samo ako je dejstvo dato u analitičkom obliku i sa „dovoljno jednostavnom“ funkcijom promene
  - Za zemljotresno dejstvo (akcelerogram) prethodni uslov nije ispunjen ako se posmatra čitava vremenska istorija

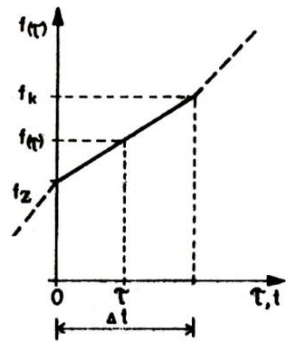


# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija Duhamel-ovog integrala**
  - Ako se ubrzanje tla između dva susedna snimljena podatka aproksimira pravom linijom, a samim tim i promena opterećenja, moguće je numerički rešiti inegral iz prethodne jednačine za zadati akcelerogram




Linearna promena opterećenja $f$ po vremenskim intervalima $\Delta t$

  - Analizirano vreme podeli se na vremenske intervale $\Delta t$ (koji npr. odgovaraju vremenskim intervalima snimljenih ubrzanja tla tokom zemljotresa; biće kasnije komentarisano)
  - Najbolje je za numerički proračun da je vremenska dužina intervala konstantna (ovo odgovara akcelerogramu), mada može biti i promenljiva
  - Početno pomeranje i početna brzina za naredni interval odgovaraju pomeranju i brzini na kraju prethodnog intervala

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija Duhamel-ovog integrala**
  - Izrazi za pomeranje, brzinu i ubrzanje mogu da se napišu na sledeći način (indeks z – početak intervala; indeks *k* – kraj intervala; *f* – dejstvo (za zemljotres $f = -m\ddot{u}_g$))

$$\boldsymbol{u_k = Af_z + Bf_k + Cu_z + D\dot{u}_z}$$

$$\boldsymbol{\dot{u}_k = A'f_z + B'f_k + C'u_z + D'\dot{u}_z}$$

$$\boldsymbol{\ddot{u}_k = (f_k - c\dot{u}_k - ku_k)/m}$$

$$A = \frac{1}{k\omega_d\Delta t}\left\{e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[(1-2\zeta^2-\zeta\omega\Delta t)sin(\omega_d\Delta t) - \left(\frac{2\zeta\omega_d}{\omega} + \omega_d\Delta t\right)cos(\omega_d\Delta t)\right] + \frac{2\zeta\omega_d}{\omega}\right\}$$

$$B = \frac{1}{k\omega_d\Delta t}\left\{e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[-(1-2\zeta^2)sin(\omega_d\Delta t) + \frac{2\zeta\omega_d}{\omega}cos(\omega_d\Delta t)\right] + \omega_d\Delta t - \frac{2\zeta\omega_d}{\omega}\right\}$$

$$C = e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[cos(\omega_d\Delta t) + \frac{\zeta\omega}{\omega_d}sin(\omega_d\Delta t)\right] \qquad D = \frac{1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega\Delta t}sin(\omega_d\Delta t)$$

$$A' = \frac{1}{k\omega_d\Delta t}\{e^{-\zeta\omega\Delta t}[(\zeta\omega + \omega^2\Delta t)sin(\omega_d\Delta t) + \omega_d\Delta t cos(\omega_d\Delta t)] - \omega_d\}$$

$$B' = \frac{1}{k\omega_d\Delta t}[-e^{-\zeta\omega\Delta t}[\zeta\omega sin(\omega_d\Delta t) + \omega_d cos(\omega_d\Delta t)] + \omega_d]$$

$$C' = -\frac{\omega^2}{\omega_d}e^{-\zeta\omega\Delta t}sin(\omega_d\Delta t) \qquad D' = e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[cos(\omega_d\Delta t) - \frac{\zeta\omega}{\omega_d}sin(\omega_d\Delta t)\right]$$

**Komentari:**

- Rešenje može da se primeni za proizvoljno promenljivo dinamičko dejstvo $f$
- Za zemljotresno dejstvo koristi se $p_{eff} = -m\ddot{u}_g$
- Izračunate vrednosti pomeranja tačne su za dejstvo sastavljeno od linearnih sektora bez obzira na trajanje intervala $\Delta t$
- Trajanje intervala proračuna $\Delta t$, između ostalog, diktira i opterećenje (biće komentarisano kasnije)
- U opštem slučaju tačnost rezultata se poboljšava skraćivanjem trajanja intervala proračuna $\Delta t$ (biće komentarisano kasnije)
- Pošto se rešenje pomoću Duhamel-ovog integrala zasniva na superpoziciji metoda se koristi samo za analizu u lineranom području

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija**
  - **Newmark-ov postupak sa konstantnim (prosečnim) ubrzanjem**
    - Pretpostavkom o promeni ubrzanja tokom intervala diferencijalnu jednačinu kretanja pretvaramo u algebarsku i dobijamo rešenja u diskretnim trenucima vremena
    - Jednačina kretanja koje se pišu za trenutak $t_{i+1}$ pa ovaj postupak naziva *implicitni postupak*
    - **Postupak proračuna**
    - **Inicijalni proračun (jednom na početku)**
    - **1)** Početno pomeranje $u(0) = u_0$ i početna brzina $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = v_0$ su zadati
    - **2)** Na osnovu početnih uslova određuje se početno ubrzanje iz izraza

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}} = \ (\boldsymbol{F}_{\mathbf{0}} - \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_{\mathbf{0}})/\boldsymbol{m}$$

    - **3)** Ako je dužina intervala $\Delta t$ konstantna (uobičajeno) zamenjujuća krutost $\bar{k}$ je konstantna i određuje se jednom na početku proračuna

$$\bar{\boldsymbol{k}} = \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\Delta t}^{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\Delta t}} + \boldsymbol{k}$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija**
  - **Newmark-ov postupak sa konstantnim (prosečnim) ubrzanjem**
    - **Postupak proračuna**
    - **U svakom koraku**
    - **4)** Proračun zamenjujućeg opterećenja $\bar{f}$

$$\bar{f} = f_{i+1} + \left[\frac{4}{\Delta t^2}u_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + \ddot{u}_i\right]m + \left[\frac{2}{\Delta t}u_i + \dot{u}_i\right]c$$

    - **5)** Proračun pomeranja na kraju intervala $u_{i+1}$

$$u_{i+1} = \bar{f}/\bar{k}$$

    - **6)** Proračun brzine na kraju intervala $\dot{u}_{i+1}$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t}(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i$$

    - **7)** Proračun ubrzanja na kraju intervala $\ddot{u}_{i+1}$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i - \ddot{u}_i \qquad \text{ili} \qquad \ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}(f_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1})$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija**
  - **Metoda centralnih razlika**
    - Posmatraju se tri trenutka vremena $t_{i-1}$, $t_i$ i $t_{i+1}$ pri čemu je $t_{i\mp1} = t_i \mp \Delta t$
    - Koriste se relacije konačnih razlika
    - Nepoznato pomeranje $u_{i+1}$ u trenutku $t_{i+1}$ određuje se iz jednačina kretanja koje su napisane za trenutak $t_i$ pa ovaj postupak spada u tzv. *postupke eksplicitne integracije*
    - **Postupak proračuna**
    - **Inicijalni proračun (jednom na početku)**
    - **1)** Početno pomeranje $u(0) = u_0$ i početna brzina $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = v_0$ su zadati
    - **2)** Na osnovu početnih uslova određuje se početno ubrzanje iz izraza

$$\boldsymbol{\ddot{u}_0 = \ (f_0 - c\dot{u}_0 - ku_0)/m}$$

    - **3)** Proračun fiktivnog pomeranja $u_{-1}$

$$\boldsymbol{u_{-1} = u_0 - \Delta t\dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_0}$$

    - **4)** Proračun ekvivalentne mase $M^*$

$$\boldsymbol{M^* = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}}$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija**
  - **Metoda centralnih razlika**
    - **Postupak proračuna**
    - **U svakom koraku**
    - **5)** Proračun ekvivalentnog opterećenja $f_i^*$

$$f_i^* = f_i - \left[\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{\Delta t^2}\right] u_i$$

    - **6)** Proračun pomeranja $y_{i+1}$

$$u_{i+1} = f_i^* / M^*$$

    - **7)** Proračun brzine $\dot{u}_i$

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$$

    - **8)** Proračun ubrzanja $\ddot{u}_i$

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2}$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija**
  - **Komentari za tačnost i stabilnost metoda**
    - Newmark-ov postupak sa konstantnim (prosečnim) ubrzanjem je numerički bezuslovno stabilna metoda
    - Metoda centralnih razlika je uslovno stabilna metoda, a rešenje je numerički stabilno ako je ispunjeno sledeće

      $$\boldsymbol{\Delta t \leq T/\pi}$$

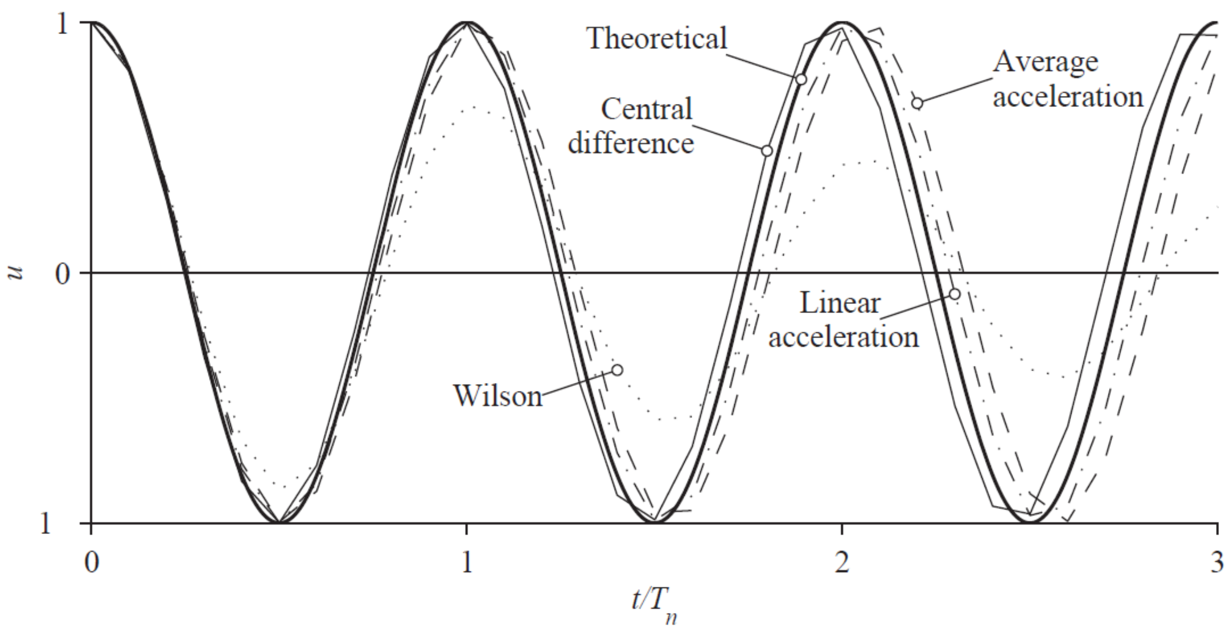
    - Iskustvo pokazuje da je za odgovarajuću tačnost potrebno usvojiti

      $$\boldsymbol{\Delta t \leq T/10}$$

      - gde je $T$ svojstveni period vibracija
    - Kod izbora trajanja intervala $\Delta t$ treba uzeti u obzir i vremenski tok dinamičkog opterećenja jer u proračun ulaze samo veličine opterećenja na granicama između intervala. Interval se bira na takav način da se promene (lomovi, vrhovi i sl.) opterećenja podudaraju sa granicama intervala
    - Kod zemljotresnog opterećenja, gde su vrednosti akcelerograma date obično u intervalima između 0,005 s do 0,02 s, obično se taj interval uzima za interval numeričke integracije u praktičnim proračunima tako da su najčešće zadovoljeni prethodni uslovi

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Numerička integracija**
  - **Komentari za tačnost i stabilnost metoda**
    - U opštem slučaju uticaj grešaka kod stabilnih metoda može da bude sličan uticaju prigušenja, tj. može da produžava period i može da smanjuje amplitudu



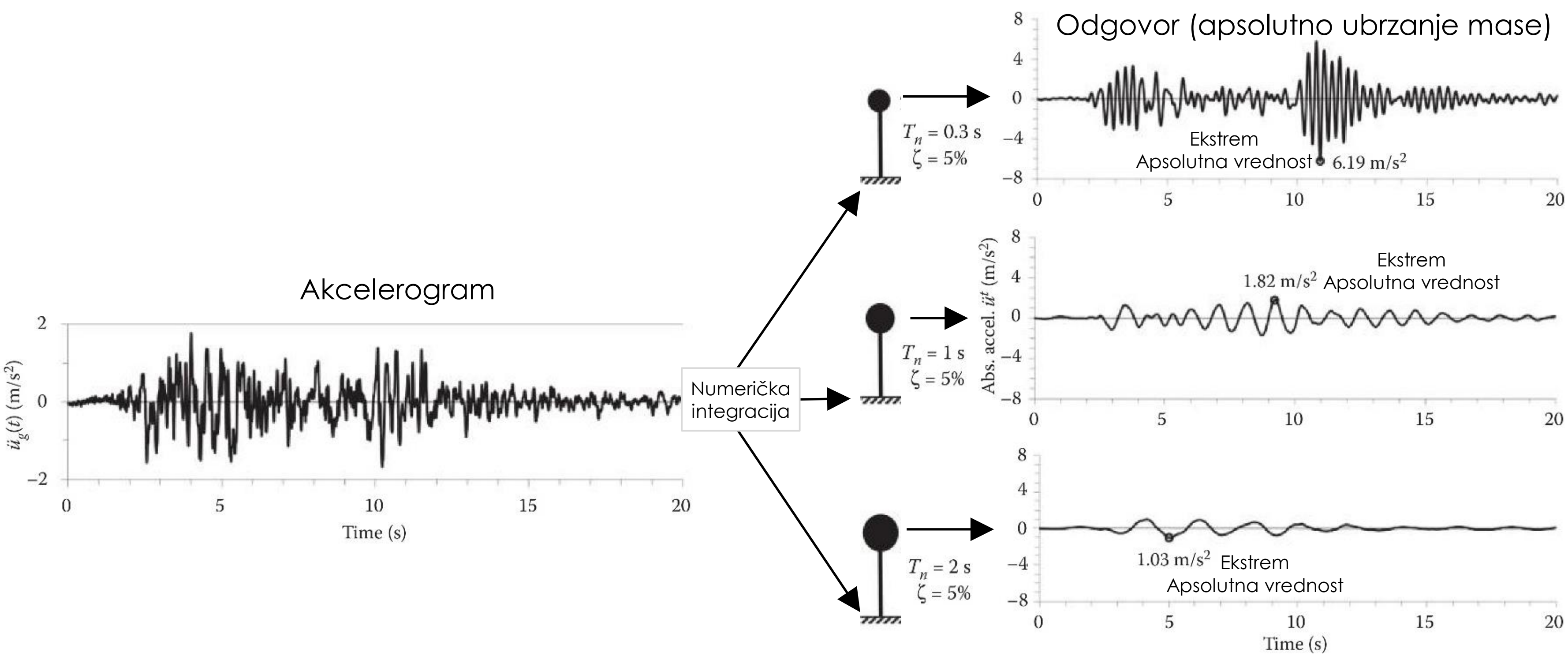

$$\Delta t / T_n = 0.1$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Spektar odgovora**
  - Kod dimenzionisanja konstrukcije obično nas zanimaju maksimalne veličine odgovora sistema dok je vremenski tok odgovora od manjeg interesa
  - Korisno je za praksu imati takav dijagram sa koga može odmah da se očita veličina apsolutno maksimalnog odgovora za različite konstrukcije
  - Takav dijagram se naziva Spektar odgovora (pod odgovorom se podrazumeva npr. relativno pomeranje, relativna brzina, apsolutno ubrzanje, itd.)
  - Spektar prikazuje maksimalne veličine odgovora za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja za određeno dejstvo (npr. zemljotres)
  - Na apscisi spektra obično se nanosi svojstveni period vibracija ili svojstvena kružna frekvencija (neprigušene vibracije), a na ordinati maksimalna vrednost odgovora pa se na taj način formira spektralna kriva za jedan nivo prigušenja
  - Za različite vrednosti prigušenja daju se različite spektralne krive
  - U spektru odgovora nema nikakvih informacija o vremenskom trenutku u kome je ostvarem maksimaln odgovor, a to pravi određene probleme kod sistema sa više stepeni slobode (biće komentarisano kasnije)
  - Spektar odgovora važi samo za ono opterećenje i prigušenje za koje je izračunat
  - Koristi se, između ostalog, u dinamičkoj analizi konstrukcija izloženih zemljotresu

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

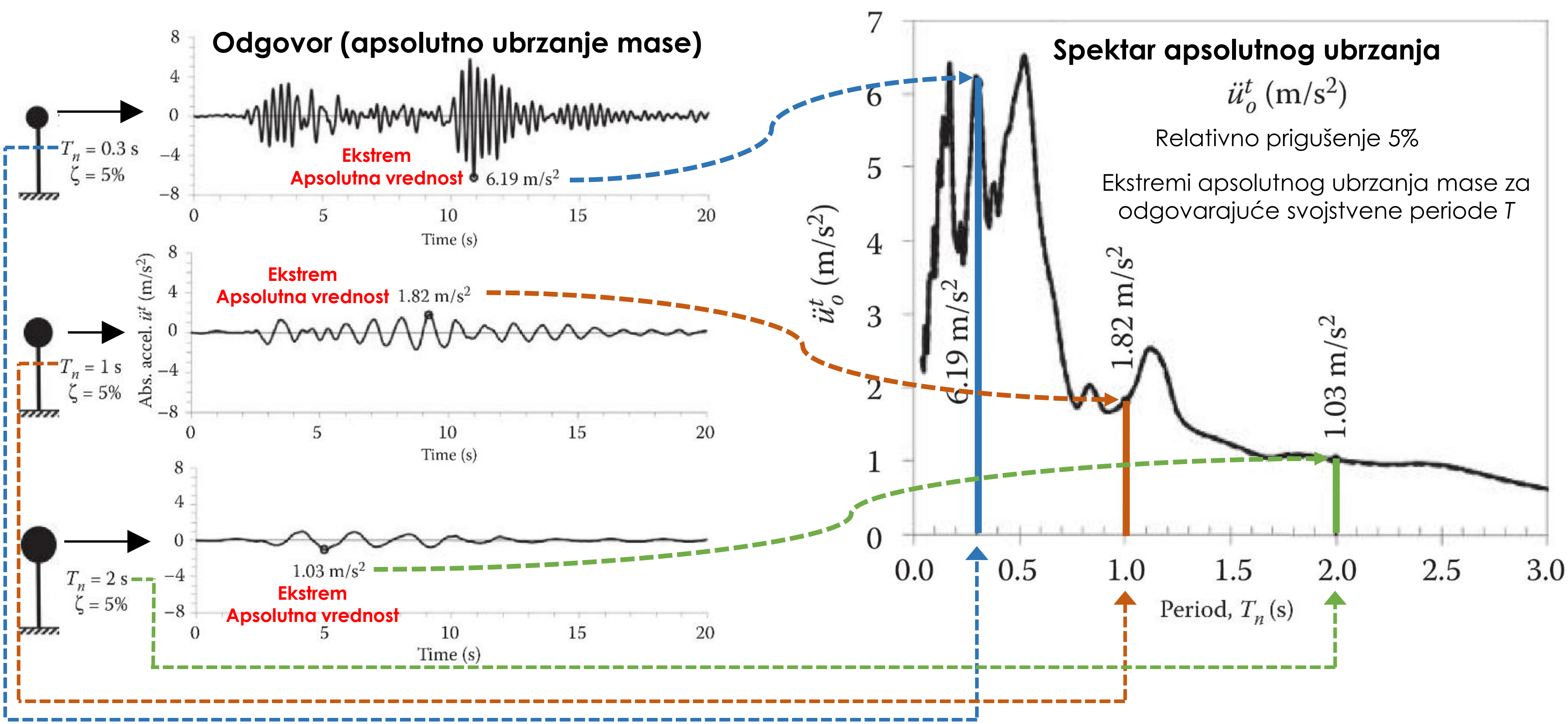
- **Spektar odgovora**
  - **Konstruisanje spektra za jedan akcelerogram i jedan nivo prigušenja**
    - Za zemljotresno dejstvo (proizvoljno promenljivo dejstvo) spektar odgovora se konstruiše tako što se određuju pojedine vrednosti (tačke) na spektru primenom numeričke integracije



# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

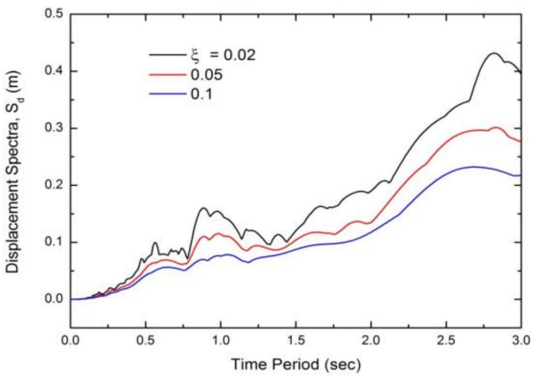
**Komentar:**
Opisanim postupkom za određivanje spektra apsolutnog ubrzanja određuju se i spektri za bilo koji drugi odgovor

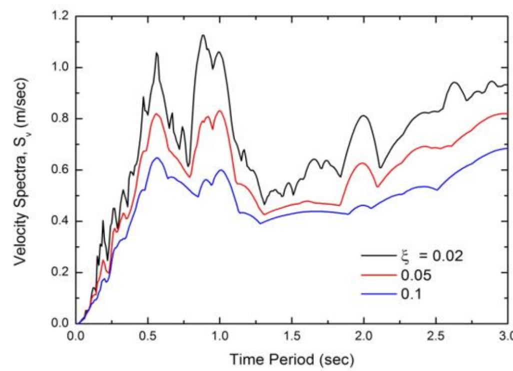
- **Spektar odgovora**
  - **Konstruisanje spektra za jedan akcelerogram i jedan nivo prigušenja**

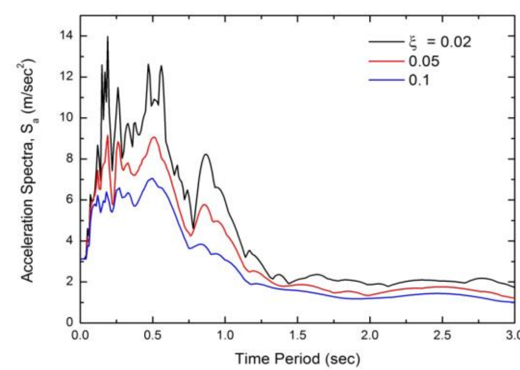


# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

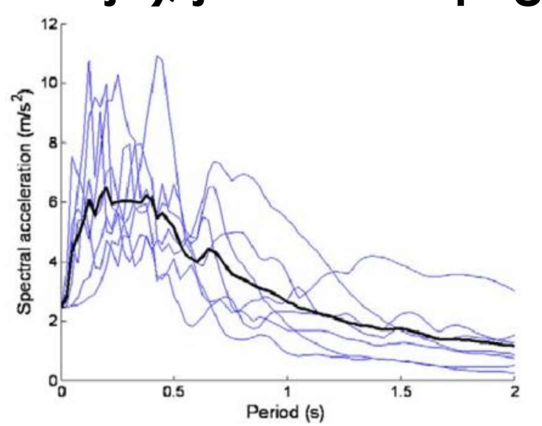
- Spektar odgovora
  - Spektri za jedan akcelerogram i više različitih nivoa prigušenja




  - Spektri za više akcelerograma (plave linije), jedan nivo prigušenja i njihov prosečan spektar (crna linija)



# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Spektar odgovora**
  - **Relativno pomeranje** SDOF sistema usled zemljotresnog dejstva je dato Duhamel-ovim integralom

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\,d\tau = -\frac{1}{\omega_d}D(t)$$

  - gde je

$$D(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau$$

  - **Relativna brzina** (izvod po vremenu proizvoda funkcija pod integralom) glasi

$$\dot{u}(t) = -\zeta\omega\overbrace{\left(-\frac{1}{\omega_d}\right)\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\,d\tau}^{u(t)} - \frac{1}{\omega_d}\omega_d\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\cos[\omega_d(t-\tau)]d\tau$$

$$\dot{u}(t) = -\zeta\omega u(t) - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\cos[\omega_d(t-\tau)]d\tau$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Spektar odgovora**
  - **Apsolutno ubrzanje** određuje se na sledeći način

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0 / \cdot (1/m) \qquad \ddot{u}^t + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad \boldsymbol{\ddot{u}^t = -\omega^2 u - 2\zeta\omega\dot{u}}$$

  - **Spektri odgovora predstavljaju maksimalne veličine odgovora**
    - **Spektar relativnih pomeranja:** $S_d(T_n,\zeta) = |u(t,T_n,\zeta)|_{max}$
    - **Spektar relativnih brzina:** $S_v(T_n,\zeta) = |\dot{u}(t,T_n,\zeta)|_{max}$
    - **Spektar apsolutnih ubrzanja:** $S_a(T_n,\zeta) = |\ddot{u}^t(t,T_n,\zeta)|_{max}$
  - U zemljotresnom inženjerstvu obično se umesto spektra apsolutnih ubrzanja koristi **spektar pseudo-ubrzanja**

$$(\boldsymbol{\ddot{u}^t = -\omega^2 u} - 2\zeta\omega\dot{u}) \qquad \boldsymbol{S_{pa} = \omega^2 S_d} \qquad \boldsymbol{S_{pa} \cong S_a}$$

**Komentar:**
Kada nema prigušenja $S_{pa} = S_a$

  - U zemljotresnom inženjerstvu obično se umesto spektra relativnih brzina koristi **spektar pseudo-brzina** (videti naredni slajd)

$$\boldsymbol{S_{pv} = \omega S_d} \qquad \boldsymbol{S_{pv} \cong S_v}$$

**Komentar:**
Kada nema prigušenja $S_{pv}$ nije jednako sa $S_v$

  - Zbog *male* razlike u veličini perioda (kružnih frekvencija) prigušenih i neprigušenih vibracija (0,0 < ζ < 0,2) za uobičajene građevinske konstrukcije usvaja se $\omega_d \cong \omega$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

**Komentar:**
Zbog *male* razlike u veličini perioda (kružnih frekvencija) prigušenih i neprigušenih vibracija (0,0 < ζ < 0,2) za uobičajene građevinske konstrukcije usvaja se $\omega_d \cong \omega$

- **Spektar odgovora**
  - **Za sistem bez prigušenja**

$$\omega u(t) = -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\sin[\omega(t-\tau)]\,d\tau \qquad \dot{u}(t) = -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\cos[\omega(t-\tau)]d\tau$$

    - $\omega u(t)$ i $\dot{u}(t)$ se razlikuju samo za član sin(...) i cos(...), a amplitude su iste pa se usvaja $S_{pv} = \omega S_d \cong S_v$

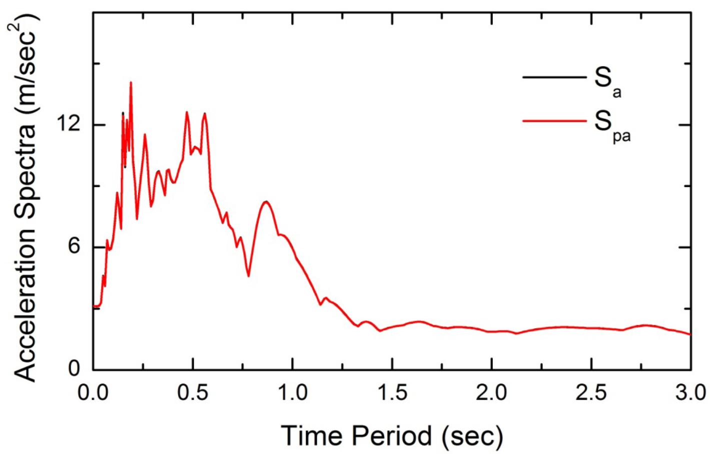
**Komentar:**
Slobodne vibracije bez prigušenja; Sistem je konzervativan
Potencijalna energija: $E_p = (1/2)ku^2$; Kinetička energija: $E_k = (1/2)mv^2$
Ukupna mehanička energija je konstantna tokom kretanja
$E = E_p + E_k = const.$ (Zakon o održanju totalne mehaničke energije)
Kada sistem prolazi kroz položaj ravnoteže:
$E_p = 0$ i $E = E_{k,max} = (1/2)mv_{max}^2 = (1/2)mS_{pv}^2$
Kada sistem zauzima „krajnji“ položaj
$E = E_{p,max} = (1/2)ku_{max}^2 = (1/2)kS_d^2$ i $E_k = 0$
Zakon o održanju totalne mehaničke energije
$E_{p,max} = E_{k,max} \Rightarrow (1/2)kS_d^2 = (1/2)mS_{pv}^2 \Rightarrow S_{pv} = \omega S_d$
Veza važi za slobodne vibracije bez prigušenja, a ne za prinudne vibracije usled $p_{eff}$ sa prigušenjem pa je $S_{pv} \approx S_v$ (videti izraz za relativnu brzinu)

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

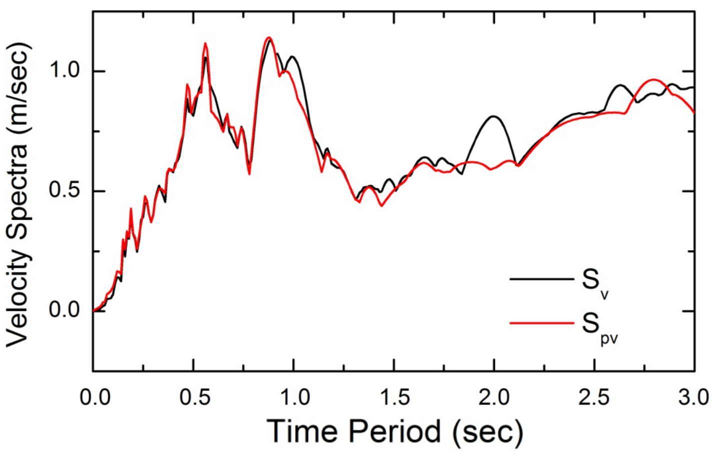
- **Spektar odgovora**

Jedan akcelerogram
$\zeta = 0{,}02$

$S_{pa} \approx S_a$




$S_{pv} \approx S_v$




**Komentar:**
- Praktično su međusobno jednaki

**Komentari:**
- Postoje „vidljive“ razlike u oblasti srednjih i dugih perioda
- Za uobičajene vrednosti prigušenja „male“ su razlike za kratke i srednje periode

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

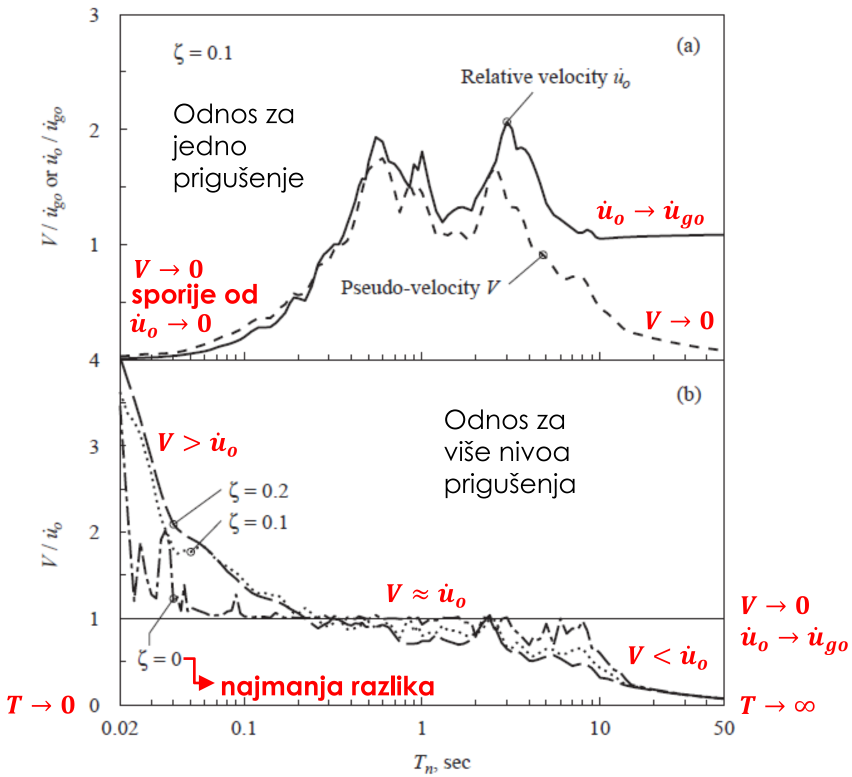
Oznake
$u_o$ – spektar relativnih pomeranja
$\dot{u}_o$ – spektar relativnih brzina
$\ddot{u}_o^t$ – spektar apsolutnih ubrzanja

- **Spektar odgovora**

Jedan akcelerogram

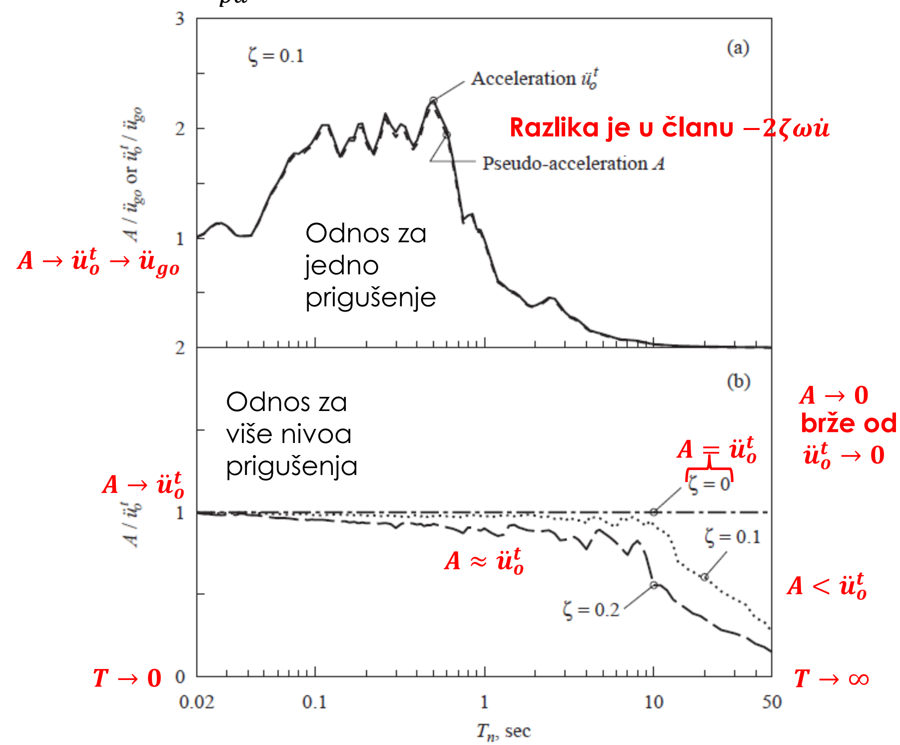
Oznake
$S_d = u_o$
$S_v = \dot{u}_o \quad S_{pv} = V$

Poređenje spektara relativnih i pseudo brzina




Oznake
$S_{pa} = A$

Poređenje spektara apsolutnih i pseudo ubrzanja



# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Spektar odgovora**
  - **Tripartitni (logaritamski) spektar (D-V-A spektar)**
    - Moguće je tri spektra prikazati na jednom grafiku (pseudoubrzanje *A*, pseudobrzina *V* i relativno pomeranje *D*)
    - Logaritamski prikaz pseudobrzine daje zajednički (tripartitni) spektar

$$A = 2\pi\, V\,/\,T_n = \hat{A}$$

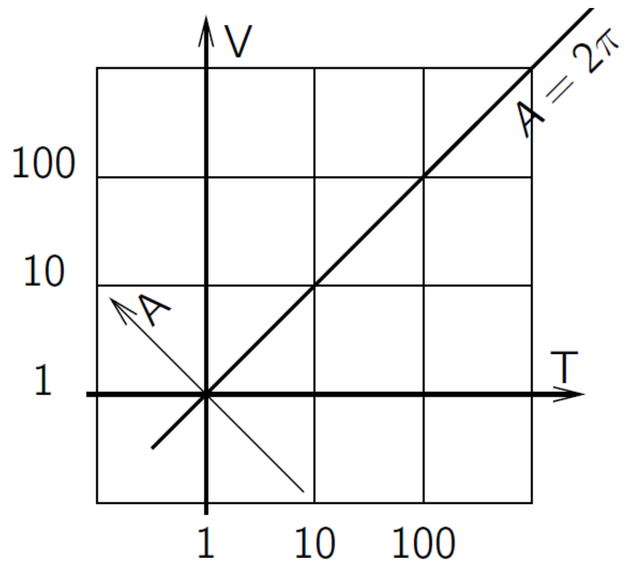
$$\log \frac{\hat{A}}{2\pi} = \log V - \log T_n$$

$$\log V = \log T_n + \log \frac{\hat{A}}{2\pi}$$

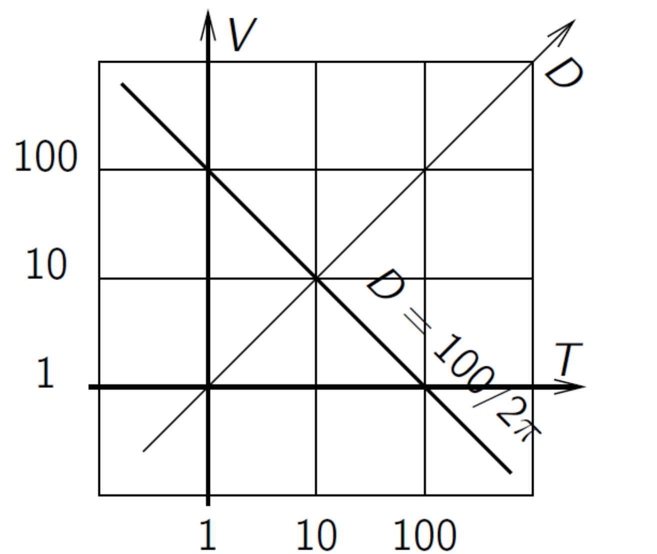
$$D = T_n\, V\,/2\pi = \hat{D}$$

$$\log 2\pi\, \hat{D} = \log V + \log T_n$$

$$\log V = \log 2\pi\, \hat{D} - \log T_n$$




In the log-log plane straight lines at 45° are characterized by a constant value of *A*.

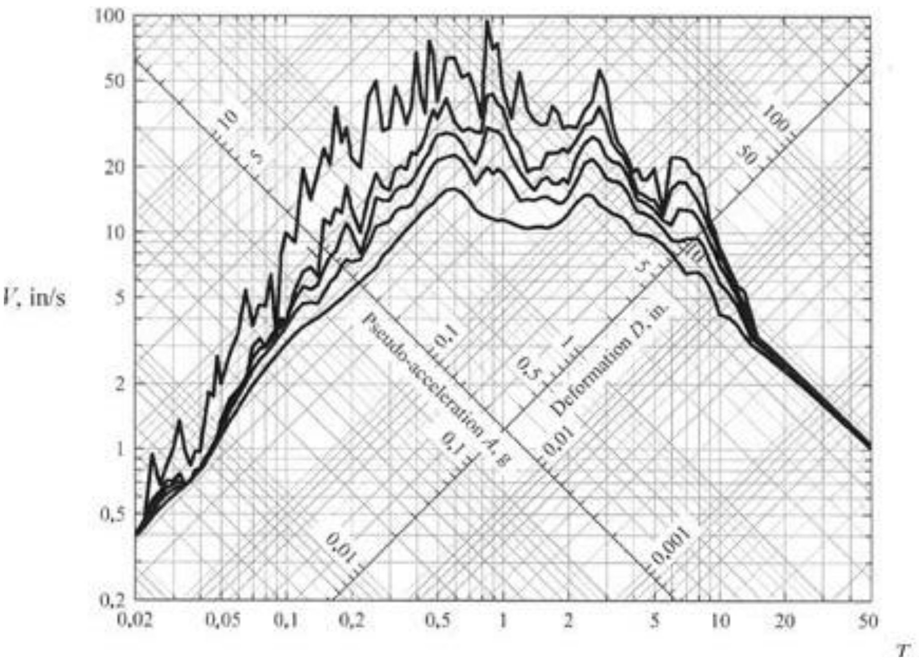


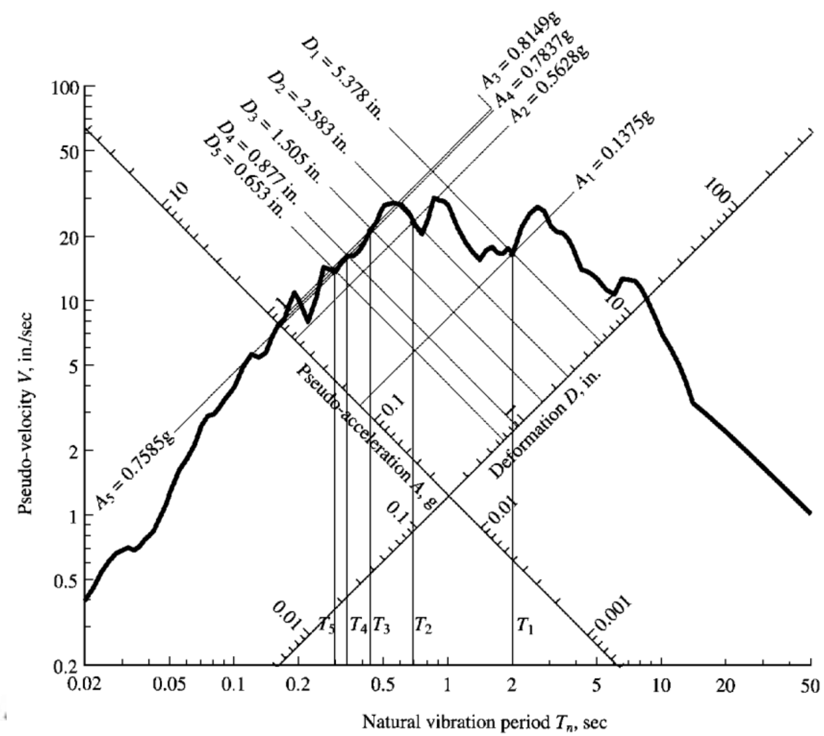

In the log-log plane straight lines at −45° are characterized by a constant value of *D*

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Spektar odgovora**
  - **D-V-A spektar**

$$\zeta = 0.00, 0.02, 0.05, 0.10, 0.20$$

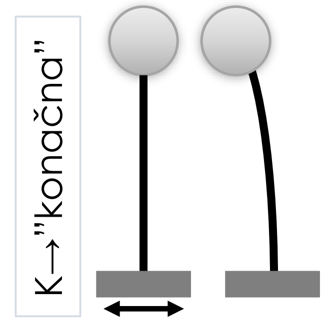


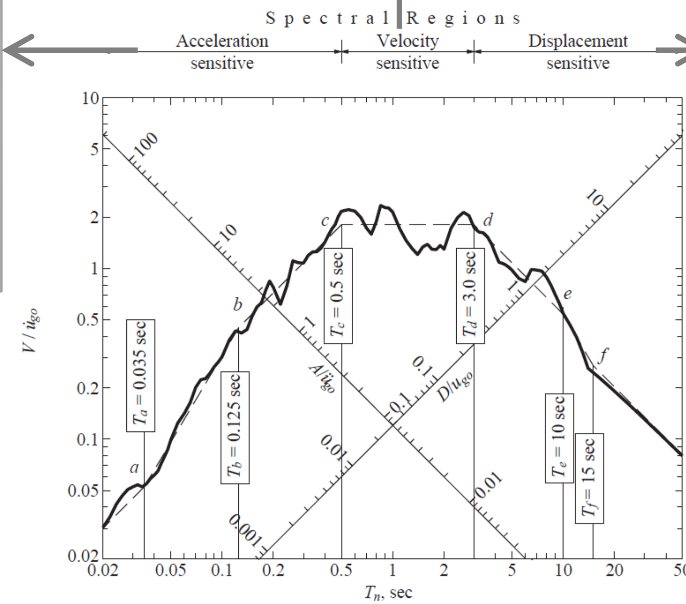
# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Spektar odgovora**
  - **D-V-A spektar**

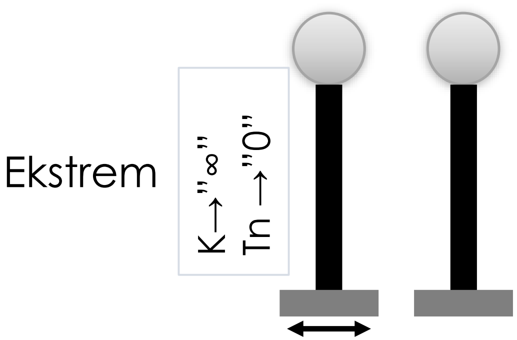
**„OBIČNE“ (srednje krute) KONSTRUKCIJE**
- Srednji svojstveni periodi se poklapaju sa predominantnim periodama vibracija tla
- Vrednosti se nalaze približno između ~ 0,5 - 3,0 s
- Najvažniji parametar **brzina (energija zavisi od brzine)**
- Najviše energije se unosi sa svojstvenim periodama koje se poklapaju sa predominantnim periodama vibracija tla
- **Velocity-sensitive region**

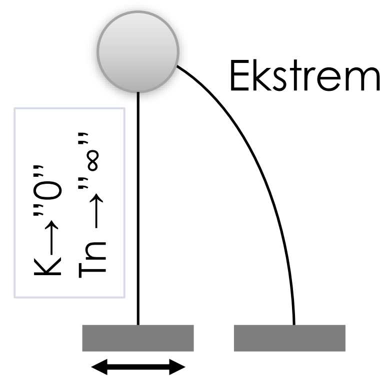



**„KRUTE“ KONSTRUKCIJE**
- Kratki svojstveni periodi vibracija (< ~ 0,5 s)
- Ubrzanje konstrukcije je približno jednako ubrzanju tla
- Najvažniji parametar **ubrzanje**
- Maksimalno ubrzanje tla je u dobroj korelaciji sa štetom
- **Acceleration-sensitive region**




**„FLEKSIBILNE“ KONSTRUKCIJE**
- Dugi svojstveni periodi (> ~ 3,0 s)
- Relativno pomeranje je približno jednako pomeranju tla
- Najvažniji parametar je **pomeranje**
- **Displacement-sensitive region**



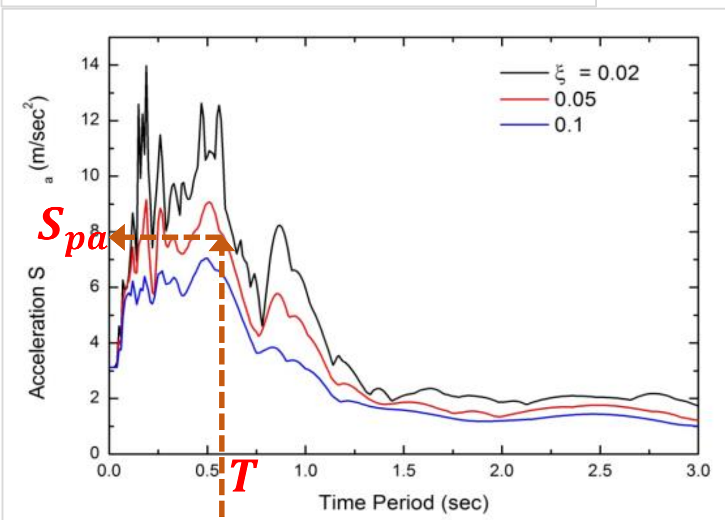

**Komentar:**
Od odnosa $v_t/a_t$ ($v_{max}/a_{max}$) zavisi početak dela spektra sa konstantnim pseudobrzinama (videti dopunski materijal *Seizmički hazard*)

# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja

- **Spektar odgovora**
  - **Primena**

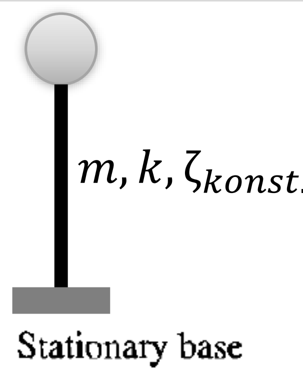
1

Odredi se spektar odgovora (npr. pseudo-ubrzanja) za jedan akcelerogram i više različitih nivoa prigušenja numeričkim postupkom




2

Analizira se sistem sa jednim stepenom slobode.
Određivanje perioda slobodnih neprigušenih vibracija $T$




3

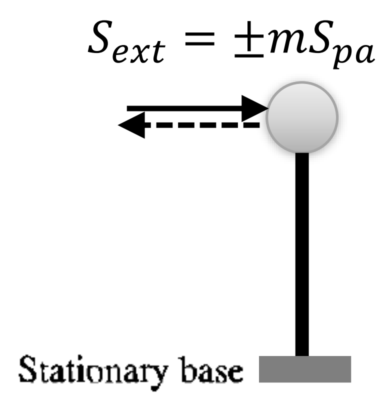
Odredi se pseudo-ubrzanje $S_{pa}(T, \zeta_{konst.})$

4

Odredi se seizmička sila $S_{ext} = \pm m S_{pa}$

5

Statička analiza usled seizmičke sile i određivanje ekstremnog odgovora



# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Jednačine kretanja**

**MDOF**
**Multiple-Degree-Of-Freedom**

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)$$

$$\boxed{\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}} + \boxed{\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}} + \boxed{\mathbf{k}\mathbf{u}} = \mathbf{p}(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Nj} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

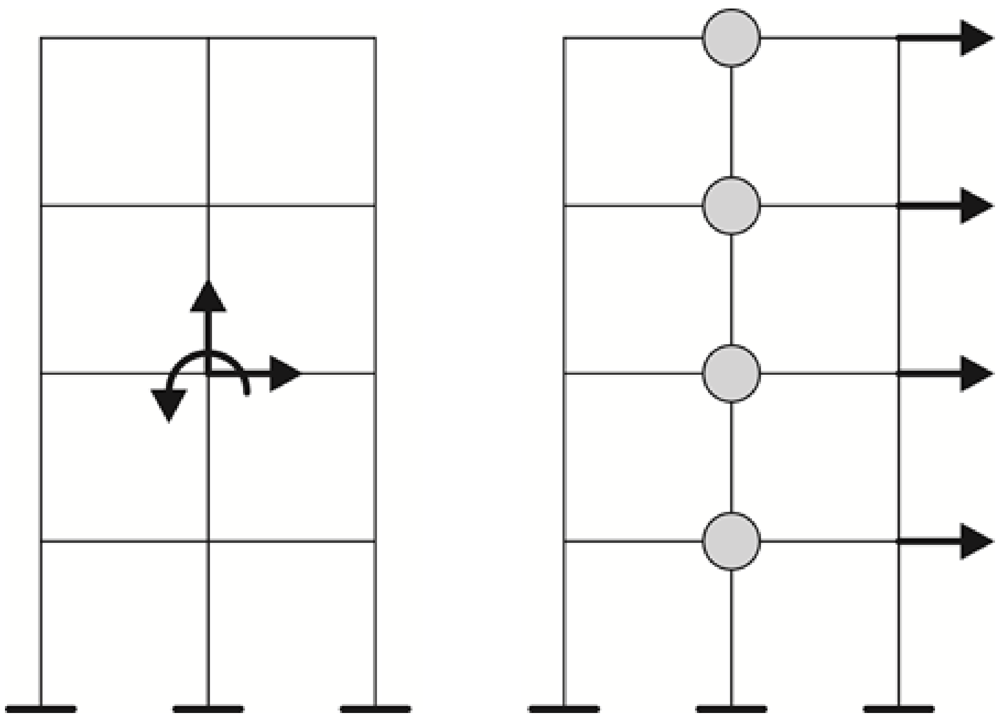
- **Jednačine kretanja**
  - U opštem slučaju važi da je $m_{ij} \neq 0$, $c_{ij} \neq 0$ i $k_{ij} \neq 0$ kada je $i \neq j$
  - Postoje dva specijalna slučaja:
    - 1) $k_{ij} \neq 0$ i $m_{ij} = 0$ za $i \neq j$ (matrica mase je dijagonalna)
      - za ovakav sistem se kaže da je **statički ili elastično spregnut (dinamički ili inercijalno nespregnut)**
    - 2) $k_{ij} = 0$ i $m_{ij} \neq 0$ za $i \neq j$ (matrica krutosti je dijagonalna)
      - za ovakav sistem se kaže da je **dinamički ili inercijalno spregnut (statički ili elastično nespregnut)**
  - **Dinamički model za analizu uobičajenih građevinskih konstrukcija**
    - Statički ili elastično spregnut sistem (dinamički ili inercijalno nespregnut sistem)
    - Diskretno raspoređene mase (koncentrisane mase u čvorovima modela prema tzv. pripadajućim dužinama, površinama, zapreminama) i maseni momenti inercije (najčešće se zanemaruju)
    - Matrica prigušenja se formira kao linearna kombinacija matrice mase i matrice krutosti

$$\begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{NN} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix}$$

≠ j (matrica krutosti je dijagonalnc
aže da je dinamički ili inercijalno spr
nalizu uobičajenih građevin

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Kondenzacija stepeni slobode**
  - Prelazak sa modela za statičku analizu na model za dinamičku analizu, koji ima manji broj stepeni slobode od statičkog modela, može da se izvrši postupkom kondenzacije. Na taj način se eliminišu nebitni stepene slobode, a to su oni koji su vezani za male inercijalne sile



# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Kondenzacija stepeni slobode**
  - Diferencijalne jednačine kretanja

$$\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

  - Uzimajući u obzir podelu na bitne i nebitne stepene slobode uz pretpostavku da inercijalne sile uz nebitne stepene slobode nemaju nikakav uticaj na odgovor sistema (index $b$ predstavlja bitne, a index $n$ nebitne stepene slobode) sledi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \ddot{\mathbf{U}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn} & \mathbf{K}_{nb} \\ \mathbf{K}_{bn} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix}$$

  - Prvi sistem jednačina glasi

$$\mathbf{K}_{nn}\mathbf{U}_n + \mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b = \mathbf{0}$$

  - iz koga određujemo vezu između nebitnih i bitnih stepeni slobode pomeranja

$$\mathbf{U}_n = -\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Kondenzacija stepeni slobode**
  - Drugi sistem jednačina glasi
    $$\mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{U}}_b + \mathbf{K}_{bn}\mathbf{U}_n + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b$$
  - Koristeći $\mathbf{U}_n = -\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b$ sledi
    $$\mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{U}}_b + (\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bn}\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb})\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b$$
  - Kondenzovana matrica krutosti glasi
    $$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bn}\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}$$
  - Veza između bitnih i nebitnih stepeni slobode je statička pa se zbog toga postupak naziva i statička kondenzacija
  - Napomene
    - Za slučaj dinamičkog dejstva koje deluje u pravcu bitnih stepeni slobode, zatim za sistem koji ima koncentrisane mase i čije je prigušenje jednako nuli prethodno opisanim postupkom statičke kondenzacije ne činimo nikakvu grešku
    - U opštim slučajevima, kada prethodno navedene pretpostavke nisu ispunjene, i dalje upotrebljavamo postupak statičke kondenzacije ali pri tome u proračun uvodimo određenu grešku jer je statička veza između bitnih i nebitnih stepeni slobode približna

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije**
  - Diferencijalne jednačine kretanja u matričnom obliku

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$$

  - ili simbolički $\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{0}$
    - gde su
      - matrica masa $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$
      - matrica krutosti $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$
      - vektor pomeranja $\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$ i vektor ubrzanja $\mathbf{\ddot{U}} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix}$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti**
  - Pretpostavlja se da sve mase vrše sinhrone i sinfazne vibracije harmonijskog tipa. Tada će mase vibrirati istom frekvencijom i istom fazom. Sve mase prolaze istovremeno kroz ravnotežni položaj, a razlikuju se amplitude. Rešenje se traži u obliku:

$$u_i = A_i \sin(\omega t + \alpha) \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \alpha) = \mathbf{A} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{A}\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

  - Ako se rešenje unese u jednačine kretanja dobija se sistem homogenih linearnih algebarskih jednačina

$$\left.\begin{aligned} &(k_{11} - m_1\omega^2)A_1 + k_{12}A_2 + k_{13}A_3 + \ldots + k_{1n}A_n = 0 \\ &k_{21}A_1 + (k_{22} - m_2\omega^2)A_2 + k_{23}A_3 + \cdots + k_{2n}A_n = 0 \\ &\qquad \ldots \\ &k_{n1}A_1 + k_{n2}A_2 + k_{n3}A_3 + \cdots + (k_{nn} - m_n\omega^2)A_n = 0 \end{aligned}\right\} \mathbf{KA} - \omega^2\mathbf{MA} = 0 \Rightarrow (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti**
  - U matematičkom smislu prethodna jednačina predstavlja problem svojstvenih vrednosti para matrica $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$
  - Da bi se odredilo netrivijalno rešenje (potrebno je odrediti $\omega^2$ za koje postoje netrivijalna rešenja za $\mathbf{A}$) determinanta koeficijenata uz nepoznate mora da bude jednaka nuli. Na taj način se dobija jednačina n-tog stepena u odnosu na nepoznate kvadrate svojstvenih kružnih frekvencija (karakteristični polinom ili karakteristična jednačina ili frekventna jednačina)

$$\mathbf{det}(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = \mathbf{0}$$

  - Iz frekventne jednačine određuje se *n* nepoznatih svojstvenih kružnih frekvencija, pri čemu se za svaku od ovih kružnih frekvencija ostvaruju sinhrone i sinfazne oscilacije
  - Rešenja frekventne jednačine su svojstvene kružne frekvencije sistema
    - $\omega_1$ se naziva prva ili osnovna svojstvena kružna frekvencija ($T_1 = 2\pi/\omega_1$ – prvi ili osnovni svojstveni period vibracija)

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_n$$

$$T_1 > T_2 > T_3 > \cdots > T_n$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

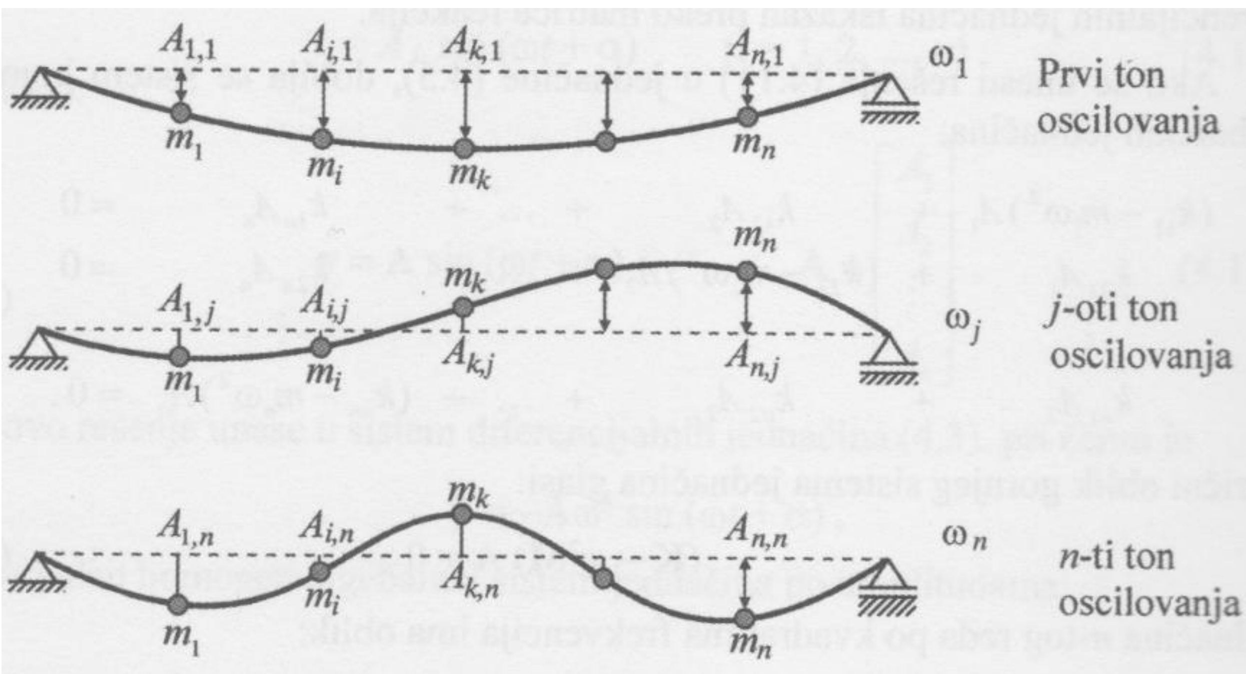
- **Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti**
  - Nakon određivanja svojstvenih kružnih frekvencija (pri čemu svakoj $\omega_i$ odgovara jedno netrivijalno rešenje za vektor $\mathbf{A}_i$) amplitude ne mogu da se odrede eksplicitno jer je sistem jednačina homogen već se mogu odrediti samo količnici nepoznatih amplituda, tj. amplitude se mogu odrediti sa tačnošću do na konstantu
  - Svakoj od svojstvenih kružnih frekvencija $\omega_i$ odgovara netrivijalno rešenje za vektor $\mathbf{A}_i$, tj. važi sledeća relacija

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{A}_i$$

    - gde je $\mathrm{A}_i$ vektor čiji su elementi konstante i koji se naziva karakteristični vektor ili svojstveni vektor ili modalni vektor, a predstavlja oblik (formu) vibracija *i*-tog tona, a naziva se i priridni ili svojstveni oblik (forma) vibracija *i*-tog tona (*i*-ti ton vibracija)
  - Ako se jednom od elemenata svojstvenog vektora $\mathbf{A}_i$ dodeli neka vrednost onda se iz sistema jednačina ostalih *n*-1 elemenata može jednoznačno odrediti. Ovaj postupak se naziva **normalizacija svojstvenih vektora** i dobijeni svojstveni vektori su **normirani svojstveni vektori**

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti**
  - Svojstveni oblici vibracija (tonovi vibracija)




**Komentari:**
- Svaki ton vibracija određen je vektorom amplituda
- Količnici amplituda su ili bezdimenzionalni brojevi u slučaju kada pomeranja svih masa imaju iste merne jedinice, na primer metar ili imaju dimenziju npr. metar/rad ako su generalisana pomeranja nekih diskretnih masa dužine, a nekih uglovi rotacije

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti**
  - Stvarno kretanje masa u opštem slučaju jednako je linearnoj kombinaciji kretanja pri pojedinim tonovima
  - Poznavanje svojstvenih oblika i svojstvenih kružnih frekvencija osnovni je podatak za praćenje dinamičkog ponašanja pri određenim dinamičkim dejstvima
  - Da bi se ostvarili svojstveni oblici, tj. da bi sistem vibrirao u nekom od svojih svojstvenih oblika moraju se zadati takvi početni uslovi koji će izazvati generalisana pomeranja koja odgovaraju svojstvenom obliku
  - Razvijeni su mnogi numerički postupci za rešavanje problema svojstvenih vrednosti koji su implementirani u računarske softvere za strukturalnu analizu konstrukcija

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije**
  - **Ortogonalnost svojstvenih oblika**
    - Uslov ortogonalnosti u odnosu na matricu mase i krutosti

$$\mathbf{A}_r^T\mathbf{M}\mathbf{A}_s = 0 \text{ za } r \neq s \qquad \mathbf{A}_r^T\mathbf{K}\mathbf{A}_s = 0 \text{ za } r \neq s$$

$$\mathbf{A}_r^T\mathbf{M}\mathbf{A}_s \neq 0 \text{ za } r = s \qquad \mathbf{A}_r^T\mathbf{K}\mathbf{A}_s \neq 0 \text{ za } r = s$$

    - U slučaju da je $r = s$ sledi:
      - Generalisana (modalna) masa za ton $r$ $\quad M_r = \mathbf{A}_r^T\ \mathbf{M}\mathbf{A}_r$
      - Generalisana (modalna) krutost za ton $r$ $\quad K_r = \mathbf{A}_r^T\ \mathbf{K}\mathbf{A}_r$

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$$

    - Svojstveni oblici $r$ i $s$ su ortogonalni u odnosu na matricu masa i krutosti pa se ove matrice nazivaju još i težinske matrice

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije**
  - **Ortonormiranje svojstvenih oblika**
    - Pogodno je svojstveni oblik vibracija $\mathbf{A}_r$ normirati na takav način da je ispunjen sledeći uslov

$$M_r = \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_r = 1$$

    - Da bi se prethodni uslov ispunio neophodno je svojstveni vektor $\mathbf{A}_r$ pomnožiti koeficijentom $\alpha$ da bi se dobile normirane vrednosti amplituda

$$\alpha \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \alpha \mathbf{A}_r = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_r}} = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \qquad \boldsymbol{\phi}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \mathbf{A}_r$$

    - S obzirom na to da su svojstveni oblici ortogonalni u ovakvom slučaju normiranja kaže se da su ortonormirani
    - Nakon prethodne normalizacije važi sledeće

$$K_r = \omega_r^2$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Slobodne neprigušene vibracije**
  - Modalni vektori mogu da se grupišu u kvadratnu matricu koja se naziva modalna matrica

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \phi_{n,2} & \cdots & \phi_{n,n} \end{bmatrix}$$

  - Formira se dijagonalna matrica čiji su elementi kvadrati svojstvenih kružnih frekvencija (spektralna matrica)

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

  - Sada rešenja problema svojstvenih vrednosti i uslovi ortogonalnosti mogu da se prikažu na sledeći način

$$\mathbf{K\Phi} = \mathbf{M\Phi\Omega}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M\Phi} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K\Phi} = \mathbf{\Omega}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza** (ili metoda superpozicije svojstvenih oblika ili metoda transformacije u glavne koordinate ili metoda razvijanja po svojstvenim oblicima)
  - Sistem simultanih diferencijalnih jednačina kretanja može da se transformiše u sistem međusobno nezavisnih jednačina gde možemo svaku jednačinu rešavati metodama koje se koriste pri rešavanju sistema sa jednim stepenom slobode pomeranja. Da bi jednačine postale nezavisne matrice $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{K}$ moraju biti dijagonalne
  - Diferencijalne jednačine kretanja u matričnom obliku glase (prinudne prigušene vibracije)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

    - gde je $\mathbf{M}$ – matrica masa, $\ddot{\mathbf{U}}$ – vektor ubrzanja, $\mathbf{C}$ – matrica prigušenja, $\dot{\mathbf{U}}$ – vektor brzina, $\mathbf{K}$ – matrica krutosti, $\mathbf{U}$ – vektor pomeranja i $\mathbf{F}$ – vektor spoljašnjih sila
  - Uvodi se vektor $\mathbf{Y}$ (vektor transformisanih koordinata ili vektor normalnih koordinata ili vektor modalnih koordinata) koji je sa vektorom pomeranja $\mathbf{U}$ u sledećoj vezi (ključna zamisao je da se vektor pomeranja $\mathbf{U}$ izrazi pomoću svojstvenih vektora $\mathbf{\Phi}$)

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i Y_i(t)$$

- Vektor pomeranja se izražava kao linearna kombinacija amplituda svojstvenih oblika vibracija
- Izraz predstavlja linearnu transformaciju generalisanih koordinata
- Matrica Φ je nezavisna od vremena

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - U prethodnoj jednačini matrica $\mathbf{\Phi}$ je matrica svojstvenih oblika (modalna matrica ili matrica transformacije)

$$\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \mathbf{\Phi}_3, \ldots, \mathbf{\Phi}_n] \qquad n - \text{broj stepeni slobode}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \phi_{n,2} & \cdots & \phi_{n,n} \end{bmatrix}$$

  - Vektori brzine i ubrzanja mogu da se predstave na sledeći način

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i \dot{Y}_i(t) \qquad \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i \ddot{Y}_i(t)$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - Unoseći izraze za $\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{U}}$ i $\ddot{\mathbf{U}}$ u diferencijalne jednačine kretanja i množeći ih sa leve strane sa $\mathbf{\Phi}^T$ sledi

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}$$

    - gde su

$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$ — Matrica generalisanih (modalnih) masa

$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$ — Matrica generalisanih (modalnih) prigušenja

$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$ — Matrica generalisanih (modalnih) krutosti

$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}$ — Vektor generalisanih (modalnih) sila

  - Sada diferencijalne jednačine kretanja mogu da se zapišu u sledećem obliku

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{F}}$$

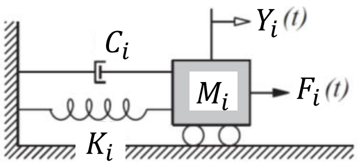
  - Matrice $\bar{\mathbf{M}}$ i $\bar{\mathbf{K}}$ su dijagonalne zbog uslova ortogonalnosti, dok matrica $\bar{\mathbf{C}}$ u opštem slučaju nije...

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_n \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_n \end{bmatrix}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n \end{bmatrix}$$

- **Modalna analiza**
  - ... međutim za sada se usvaja da je matrica $\mathbf{C}$ takva da jednačina $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$ predstavlja način njene transformacije na dijagonalnu matricu. O definisanju matrice prigušenja biće reči kasnije
  - Na ovaj način sistem od *n* simultanih diferencijalnih jednačina prevodi se u sistem od *n* nezavisnih diferencijalnih jednačina po $Y$
  - Dinamičke karakteristike sistema su generalisana masa, generalisana krutost i generalisano prigušenje, a njegovo kretanje je opisano modalnim koordinatama
  - Diferencijalna jednačina kretanja *i*-tog tona (*i*-ta modalna jednačina) glasi




$$M_i\ddot{Y}_i + C_i\dot{Y}_i + K_iY = F_i \qquad i = 1,2,3,\dots,n$$

- gde su $M_i = \mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i$ $\quad C_i = \mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_i$ $\quad K_i = \mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_i$ $\quad F_i = \mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{F}$

| Generalisana masa *i*-tog tona | Generalisano prigušenje *i*-tog tona | Generalisana krutost *i*-tog tona | Generalisana sila *i*-tog tona |
|---|---|---|---|

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - Po analogiji sa sistemom koji ima jedan stepen slobode generalisano prigušenje računamo na sledeći način

$$C_i = 2\zeta_i \omega_i M_i$$

  - Veza između generalisane mase i generalisane krutosti glasi

$$K_i = \omega_i^2 M_i$$

  - Koristeći prethodne veze i deljenjem jednačine kretanja sa $M_i$ sledi jednačina kretanja *i*-tog tona

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{F_i}{M_i} \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

  - Prethodna jednačina se rešava metodama opisanim za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja (npr. za proizvoljno promenljivu silu može da se primeni numerička integracija)

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - Nakon rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja za svaki ton posebno metodama koje se koriste za sistem sa jednim stepenom slobode vektor pomeranja u osnovnom koordinatnom sistemu određuje se na sledeći način

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{Y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i Y_i(t)$$

  - Ekvivalentno statičko opterećenje $\mathbf{F}_E(t)$ za analizu na statičkom modelu radi određivanja uticaja glasi

$$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i Y_i(t)$$

ili

$$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{M}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i \omega_i^2 Y_i(t)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - Početni uslovi

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{\Phi}\mathbf{Y}_0 \Rightarrow \mathbf{Y}_0 = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{U}_0 \qquad \dot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{Y}}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{\Phi}^{-1}\dot{\mathbf{U}}_0$$

ili

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{U}_0 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{Y}_0 = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{Y}_0 \Rightarrow \mathbf{Y}_0 = \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{U}_0$$

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{Y}}_0 = \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{Y}}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{Y}}_0 = \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0$$

  - U okviru modalne analize moguće je proračunom obuhvatiti samo određen broj svojstvenih vrednosti, koje dominantno utiču na odgovor, pa se na taj način dobija približno rešenje u odnosu na ono sa obuhvatanjem svih tonova u analizi ali se smanjuje obim numeričke analize
  - Svojstveni vektori koji su ortogonalni na vektor opterećenja ne utiču na odgovor sistema
  - Može da se primeni za proizvoljno promenljivo dinamičko dejstvo

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - Prigušenje
    - Kod klasično prigušenih sistema podrazumeva se da je sličan mehanizam prigušenja raspodeljen po celoj konstrukciji (npr. višespratna zgrada sa sličnim konstrukcijskim sistemom i materijalom po celoj visini)
    - Klasična matrica prigušenja predstavlja idealizaciju matrice prigušenja za prethodno opisanu pretpostavku
    - Rayleigh-jevo prigušenje (proporcionalno prigušenje)

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$$

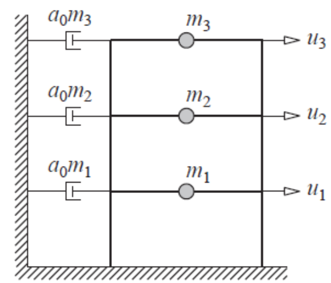
    - S obzirom na to da je matrica prigušenja definisana kao linearna kombinacija matrice masa $\mathbf{M}$ i matrice krutosti $\mathbf{K}$ za nju važi uslov ortogonalnosti i može da se primeni u modalnoj analizi (klasično prigušenje)
    - Ako usvojimo za dva tona *i* i *j* vrednosti relativnog prigušenja $\zeta_i$ i $\zeta_j$ možemo da odredimo koeficijente $a_0$ i $a_1$

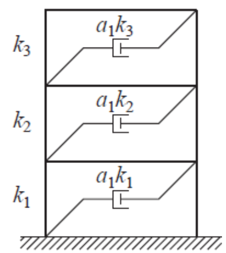
$$a_0 = 4\pi\frac{T_i\zeta_i - T_j\zeta_j}{T_i^2 - T_j^2} \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\frac{T_iT_j(T_i\zeta_j - T_j\zeta_i)}{T_i^2 - T_j^2}$$

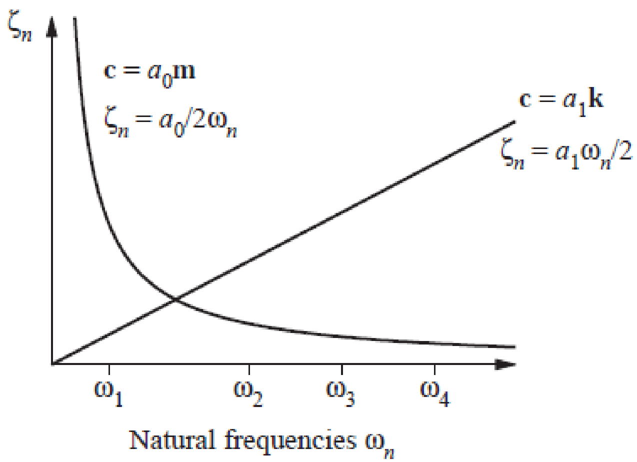
**Komentar:**
U slučaju $\zeta_i=\zeta_j=\zeta$:
$a_0 = \frac{4\pi\zeta}{T_i+T_j}$ $\quad a_1 = \frac{\zeta}{\pi}\frac{T_iT_j}{T_i+T_j}$

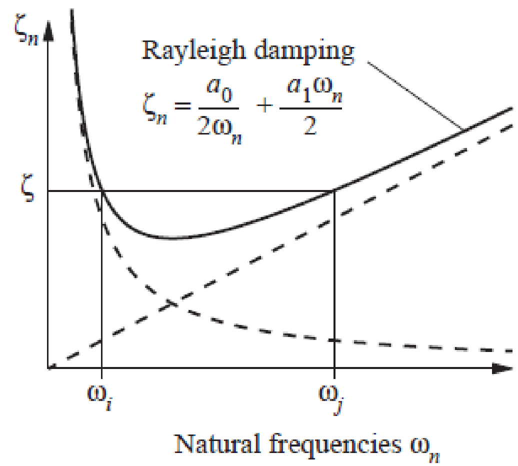
# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - Prigušenje
    - Rayleigh-jevo prigušenje




- Pretpostavka klasičnog prigušenja nije odgovarajuća kod sistema koji imaju dva ili više delova sa bitno raličitim nivoima prigušenja, kao npr. kod analize inteakcije tla i konstrukcije (u tlu ekvivalentno viskozno prigušenje iznosi 15% - 20%, a u konstrukciji 3% - 5%) ili kod sistema sa specijalnim uređajima za disipaciju energije ili kod sistema sa baznom izolacijom

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Modalna analiza**
  - Pregled faza proračuna
    - Formiranje matrice masa (dijagnalna matrica) i matrice krutosti (kondenzovana matrica krutosti)
    - Rešavanje problema svojstvenih vrednosti (svojstvene kružne frekvencije i svojstveni oblici vibracija)
    - Određivanje matrice prigušenja (Rayleigh-jevo prigušenje)
    - Formiranje modalnih jednačina i njihovo rešavanje metodama za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja
    - Određivanje odgovora sistema kombinujući rezultate iz modalnih jednačina koristeći izraze

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i Y_i(t)$$

$$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i Y_i(t) \quad \text{ili} \quad \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{M} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi}_i \omega_i^2 Y_i(t)$$

  - Metoda je zasnovana na principu superpozicije pa se upotrebljava samo za linearno-elastične sisteme

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Direktna numerička integracija**
  - Naziv znači da se pre izvršavanja numeričke integracije ne vrši nikakva transformacija jednačine kao kod modalne analize pri čemu su obuhvaćeni svi stepeni slobode (svi tonovi)
  - Može da se primeni za određivanje odgovora za proizvoljno dinamičko dejstvo
  - Postupak je analogan postupku kod SDOF sistema
  - **Newmark-ov postupak sa konstantnim ubrzanjem**
    - **Postupak proračuna** (indeksi: *p* – početak intervala i *k* – kraj intervala)
      - **Samo jednom na početku**
        - Formiranje matrice krutosti K, matrice masa M, matrice prigušenja C (npr. Rayleigh-jevo prigušenje) i vektora opterećenja F(t)
        - Zadati su početni uslovi, tj. vektori $\mathrm{U}_0$ i $\dot{\mathrm{U}}_0$
        - Na osnovu početnih uslova određuje se vektor početnih ubrzanja

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0\right)$$

        - Usvajanje koraka integracije Δt (biće komentarisano kasnije)
        - Određivanje zamenjujuće matrice krutosti $\overline{\mathrm{K}}$

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Direktna numerička integracija**
  - **Newmark-ov postupak sa konstantnim ubrzanjem**
    - **Postupak proračuna** (indeksi: $p$ – početak intervala i $k$ – kraj intervala)
      - **Za svaki korak numeričke integracije**
        - Određivanje vektora zamenjujućeg opterećenja $\bar{\mathbf{F}}$

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_p + \mathbf{M}\left(\frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_p + 2\ddot{\mathbf{U}}_p\right) + 2\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_p$$

        - Rešavanje sistema algebraskih jednačina i određivanje $\Delta\mathbf{U}$ $\qquad \bar{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$
        - Određivanje vektora pomeranja, brzine i ubrzanja

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_p + \Delta\mathbf{U} \qquad \dot{\mathbf{U}}_k = \frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{U} - \dot{\mathbf{U}}_p$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_k = \frac{4}{\Delta t^2}\Delta\mathbf{U} - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_p - \ddot{\mathbf{U}}_p \quad \text{ili} \quad \ddot{\mathbf{U}}_k = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{F}_k - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k - \mathbf{K}\mathbf{U}_k\right)$$

    - Određivanje matrice prigušenja (Rayleigh-jevo prigušenje – neophodno je odrediti periode vibracija za dva tona za koje se usvaja relativno prigušenje)
    - Bezuslovno numerički stabilna metoda

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Direktna numerička integracija**
  - **Metoda centralnih razlika**
    - **Postupak proračuna**
      - **Samo jednom na početku**
        - Formiranje matrice krutosti K, matrice masa M, matrice prigušenja C (npr. Rayleigh-jevo prigušenje) i vektora opterećenja Q(t)
        - Usvajanje koraka integracije Δt (biće komentarisano kasnije)
        - Zadati su početni uslovi, tj. vektori $\mathbf{q}^0$ i $\dot{\mathbf{q}}^0$
        - Na osnovu početnih uslova određuje se vektor početnih ubrzanja

$$\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q}^0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^0 - \mathbf{K}\mathbf{q}^0)$$

        - Određivanje  matrice koeficijenata uz nepoznate (ekvivalentna matrica mase)

$$\mathbf{M}^* = \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}$$

        - Određivanje vektora fiktivnih generalisanih koordinata u trenutku vremena $t_{-1}$

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^0 - \Delta t\dot{\mathbf{q}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{q}}^0$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Direktna numerička integracija**
  - **Metoda centralnih razlika**
    - **Postupak proračuna**
      - **Za svaki korak numeričke integracije**
        - Određivanje

$$\mathbf{Q}^{*n} = \mathbf{Q}^{n} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{q}^{n-1} - \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{q}^{n}$$

        - Reševanje sistema jednačina

$$\mathbf{M}^{*}\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{*n} \Rightarrow \mathbf{q}^{n+1}$$

        - Određivanje

$$\dot{\mathbf{q}}^{n} = \frac{1}{2\Delta t}\left(\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^{n-1}\right) \qquad \ddot{\mathbf{q}}^{n} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(\mathbf{q}^{n+1} - 2\mathbf{q}^{n} + \mathbf{q}^{n-1}\right)$$

    - Uslovno numerički stabilna metoda ($T_n$ je najmanji svojstveni period sistema)

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Direktna numerička integracija**
  - **Napomene o metodama numeričke integracije**
    - Newmark-ovo postupak je bezuslovno stabilna metoda kod koga se jednačine kretanja pišu za kraj intervala pa spada u tzv. *postupke implicitne postupke*
    - Kod metode centralnih razlika vektor nepoznatih pomeranja za trenutak $t_{i+1}$ određuje se iz jednačina kretanja koje su napisane za trenutak $t_i$ pa ovaj postupak spada u tzv. *postupke eksplicitne integracije*
    - Metoda centralnih razlika je uslovno numerički stabilna pa vremenski interval mora da zadovolji sledeći uslov ($T_n$ je svojstveni period sistema sa najkraćim trajanjem)

$$\boldsymbol{\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi}}$$

    - Iskustvo pokazuje da je za odgovarajuću tačnost potrebno usvojiti

$$\boldsymbol{\Delta t \leq T_n/10}$$

    - Prethodni uslov treba da bude ispunjen za sve tonove koje želimo dovoljno tačno da obuhvatimo pri analizi

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

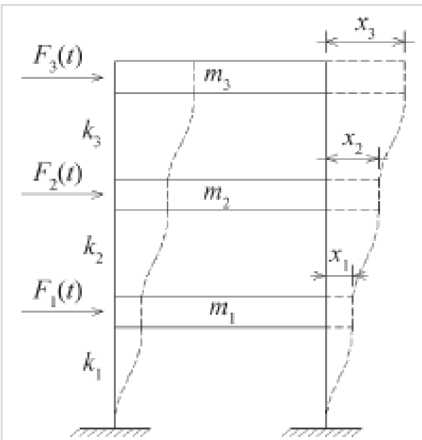
- **Direktna numerička integracija**
  - **Napomene o metodama numeričke integracije**
    - Tačnost se povećava smanjivanjem vremenskog intervala $\Delta t$
    - Kod izbora trajanja intervala $\Delta t$ treba uzeti u obzir i vremenski tok dinamičkog opterećenja jer u proračun ulaze samo veličine opterećenja na granicama između intervala. Interval se bira na takav način da se promene(lomovi, vrhovi i sl.) opterećenja podudaraju sa granicama intervala
    - Kod zemljotresnog opterećenja, gde su vrednosti akcelerograma date obično u intervalima između 0,005 s do 0,02 s, obično se taj interval uzima za interval numeričke integracije u praktičnim proračunima tako da su zadovoljeni prethodni uslovi
- **Komentar**
  - Rešenja određena modalnom analizom ili direktnom integracijom za proizvoljno promenljivo dinamičko dejstvo međusobno su ista, naravno ako su modalnom analizom obuhvaćeni svi tonovi dinamičkog modela

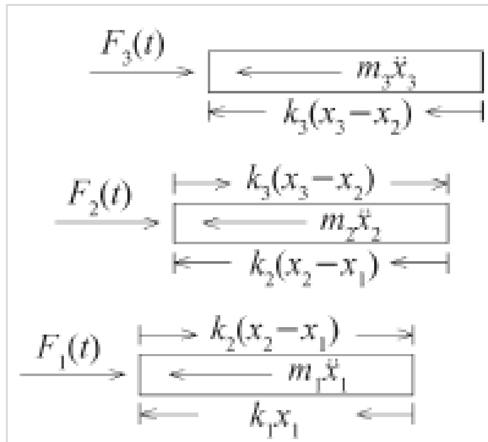
# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Određivanje uticaja u elementima konstrukcije**
  - Nakon određivanja generalisanih pomeranja u čvorovima na dinamičkom modelu, $\mathbf{U}_b$ ($b$ – bitni stepeni slobode), koji ima manje stepeni slobode od statičkog modela određivanje uticaja u elementima konstrukcije može da se sprovede na dva načina
    - **Prvi način**
      - Odrede se ostala generalisana pomeranja ($n$ – nebitni stepeni slobode) na statičkom modelu pomoću izraza $\mathbf{U}_n = -\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b$
      - Koristeći vezu između generalisanih sila u čvorovima elementa i generalisanih pomeranja čvorova elementa preko matrice krutosti određuju se generalisane sile u čvorovima elemenata pomoću izraza $\mathbf{R}_{el}\ (t) = \mathbf{k}_{el}\mathbf{u}(t)_{el}$ i nakon toga mogu da se odrede uticaji unutar elemenata konstrukcije
    - **Drugi način**
      - Odredi se ekvivalentno statičko opterećenje pomoću izraza $\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{U}_b(t)$ nakon čega se na statičkom modelu određuju uticaji u elementima konstrukcije metodama statike konstrukcija

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Okviri sa potpuno krutim tavanicama (Shear Building)**




Bez prigušenja

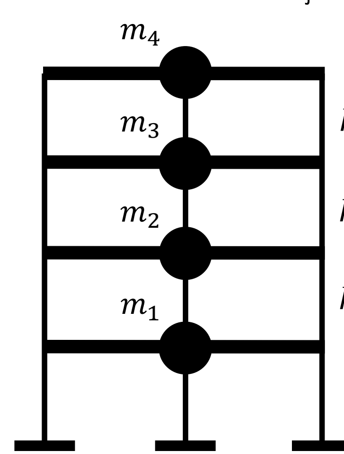
$$\sum H = 0 \Rightarrow k_i\big(x_i(t) - x_{i-1}(t)\big) - k_{i+1}\big(x_{i+1}(t) - x_i(t)\big) + m_i\ddot{x}_i(t) - F_i(t) = 0$$

$$m_i\ddot{x}_i + (k_i + k_{i+1})x_i - k_{i+1}x_{i+1} = F_i(t)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_i & (k_i+k_{i+1}) & -k_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i+1} & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & (k_{n-1}+k_n) & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

Svi stubovi imaju isto $E$, $I$ i $L$




$$k_4 = 3\frac{12EI}{L_{stuba}^3}$$

$$k_3 = 3\frac{12EI}{L_{stuba}^3}$$

$$k_2 = 3\frac{12EI}{L_{stuba}^3}$$

$$k_1 = 3\frac{12EI}{L_{stuba}^3}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)**
  - U opštem slučaju diferencijalne jednačine kretanja glase

    $$\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{C\dot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

  - Veze između apsolutnih i relativnih pomeranja pri pomeranju osnove glase

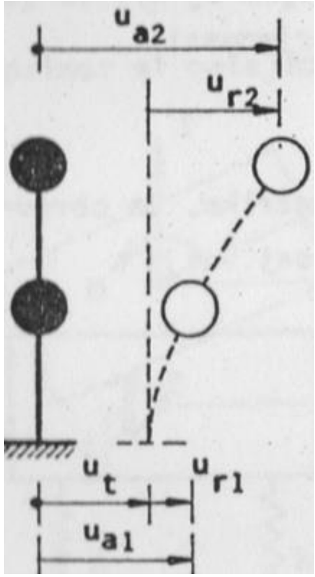
    $$u_{a1} = u_{r1} + u_t \qquad u_{a2} = u_{r2} + u_t$$

  - odnosno u matričnom obliku

    $$\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_r + \mathbf{U}_t$$

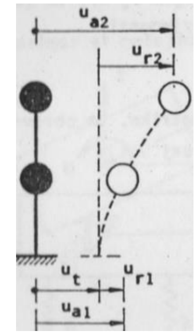
  - gde je

    $$\mathbf{U}_t = \mathbf{1}u_t$$




  - Prethodni izraz važi kod konstrukcija u ravni koje su pobuđivane samo u jednom pravcu koji odgovara stepenima slobode kretanja masa

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

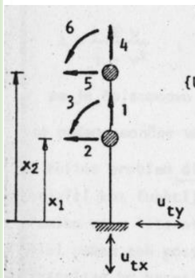



- **Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)**
  - U opštem slučaju

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{s}\mathbf{u}_t$$

    - gde je $\mathbf{u}_t$ vektor koji sadrži komponente pomeranja tla u prostoru, a $\mathbf{s}$ je vektor uticajnih koeficijenata koji predstavljaju pomeranje krute konstrukcije, kruto uklještene u tlo, kod jediničnih pomeranja tla u pojedinim pravcima. Za slučaj izbora stapena slobode kao na slici gore i pobuđivanja samo u pravcu stepeni slobode kretanja vector $\mathbf{s} = \{\mathbf{1}\}$

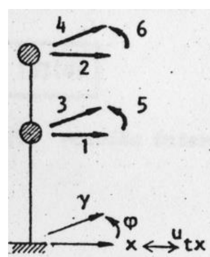
**Prinudno pomeranje u horizontalnoj i vertikalnoj ravni**




$$\{U_t\} = [s]\{u_t\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \\ 0 \\ u_{tx} \\ u_{ty} \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Prinudno pomeranje u x pravcu**

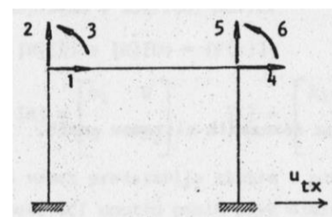



$$\{U_t\} = [s]\{u_t\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{tx} = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{tx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Prinudno pomeranje pod uglom od 45°**

$$\{s\}^T = [0.707 \quad 0.707 \quad 0.707 \quad 0.707 \quad 0 \quad 0]$$

**Prinudno pomeranje u x pravcu**




$$\{U_t\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{tx} = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ 0 \\ 0 \\ u_{tx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)**
  - Koristeći prethodne veze, analogno kao kod sistema sa jednim stepenom slobode, sledi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K}\mathbf{U}_r = 0$$

  - gde je $\ddot{\mathbf{U}}_a$ vektor apsolutnih ubrzanja, $\dot{\mathbf{U}}_r$ vektor relativih brzina i $\mathbf{U}_r$ vektor relativnih pomeranja. Prvi sabirak u jednačini kretanja je vektor inercijalnih sila, drugi sabirak je vektor sila unutrašnjeg viskoznog prigušenja i treći sabirak su sile elastičnog otpora
  - Sređivanjem se dobija ($\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_r + \mathbf{U}_t$)

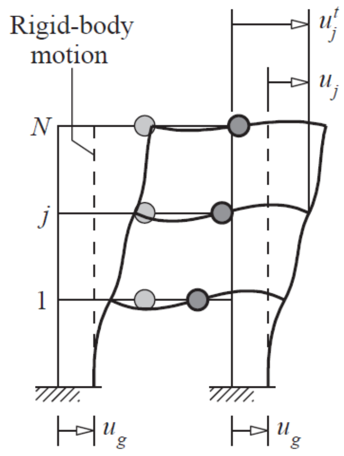
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K}\mathbf{U}_r = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t$$

    - ili

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{K}\mathbf{U}_a = \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{K}\mathbf{U}_t$$

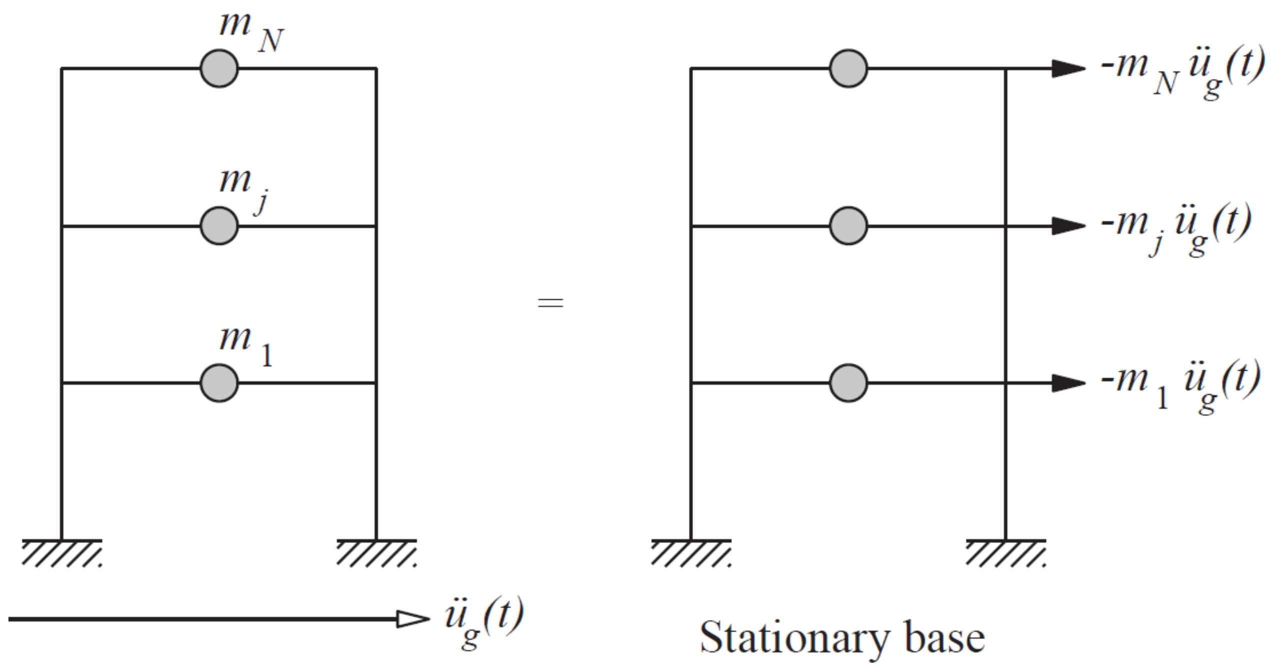
    - gde izrazi na desnoj strani prethodne dve jednačine predstavljaju vektor efektivnih sila zemljotresa
  - Prva od prethodne dve jednačine se koristi u praksi jer je seizmičko dejstvo obično zadato u vidu vremeske istorije zapisa ubrzanja tla (akcelerogram)

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja




- **Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K}\mathbf{U}_r = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g = \mathbf{p}_{eff}$$



# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Vremenska analiza odgovora (akcelerogram)**
  - **Modalna analiza**

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y = -\frac{\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{Ms}}{M_i}\ddot{u}_g \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

    - Svaka modalna jednačina se rešava numeričkom integracijom kao kod SDOF sistema i ukupni odgovor se određuje na ranije opisan način
  - **Direktna numerička integracija**

$$\mathbf{M\ddot{U}}_r + \mathbf{C\dot{U}}_r + \mathbf{KU}_r = -\mathbf{Ms}\ddot{u}_g$$

    - Primenjuju se metode numeričke integracije ranije opisane za određivanje odgovora usled proizvoljno promenljivog dinamičkog dejstva

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - **S obzirom na to da se kod modalne analize odgovor određuje za svaki ton posebno (kao da je sistem sa jednim stepenom slobode) ona može da se kombinuje sa spektrom odgovora i na taj način može da se reši problem kod sistema sa više stepeni slobode izloženog dejstvu zemljotresa definisanog preko spektra odgovora**
  - Nazivi koji se koriste:
    - Modalna analiza sa spektrima odgovora
    - Modalna spektralna analiza
    - Spektralna modalna analiza
    - Multimodalna spektralna analiza
    - Modalna seizmička analiza spektralnom teorijom
    - Spektralna analiza odgovora
    - Spektralna analiza
  - Osnovni (referentni) način za određivanje uticaja usled seizmičkog dejstva prema EN 1998-1 je modalna analiza u kombinaciji sa metodom spektra odgovora koji može da se primeni za sve konstrukcije na koje se odnosi EN 1998-1

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - Jednačina kretanja *i*-tog tona glasi (modalna analiza)

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y = -\frac{\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{Ms}}{M_i}\ddot{u}_g \qquad i = 1,2,3,\dots,n$$

  - Zbog male razlike u veličini perioda (kružnih frekvencija) prigušenih i neprigušenih vibracija za uobičajene građevinske konstrukcije (0.0 < ζ < 0,2; $\omega_d \cong \omega$) rešenje primenom Duhamel-ovog integrala za *i*-ti ton glasi

$$Y_i(t) = -\frac{\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{Ms}}{\omega_i M_i}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega_i(t-\tau)}\sin[\omega_i(t-\tau)]d\tau = \frac{L_i}{M_i}\frac{D_i(t)}{\omega_i} = \Gamma_i\frac{D_i(t)}{\omega_i}$$

    - gde je $\Gamma_i$ tzv. modalni faktor participacije (učešća) *i*-tog tona

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i} = \frac{\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{Ms}}{M_i}$$

U slučaju ortonormiranja $M_i = 1 \Rightarrow \Gamma_i = L_i = \mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{Ms}$

$$M_i = \mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i$$

**Komentar:**
Naziv nije prikladan jer asocira na to da $\Gamma_i$ predstavlja meru učešća i-tog tona u ukupnom odgovoru MDOF sistema, a to nije tačno jer $\Gamma_i$ zavisi od normalizacije svojstvenog vektora i ne predstavlja meru bilo koje modalne količine

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - Maksimalna vrednost količnika $D_i(t)/\omega_i$ u prethodnom izrazu (po analogiji sa sistemom sa jednim stepenom slobode kretanja) jednaka je odgovarajućoj veličini na spektru relativnih pomeranja

$$\left|\frac{D_i(t)}{\omega_i}\right|_{max} = S_{di} = S_d(\omega_i, \zeta_i)$$

  - Sada maksimalna veličina $Y_i$ *i*-tog tona iznosi

$$Y_{i,max} = \Gamma_i S_{di}$$

  - Vektor maksimalnih relativnih pomeranja *i*-tog tona u osnovnom koordinatnom sistemu dobija se transformacijom

$$\mathbf{U}_{i,max} = \mathbf{\Phi}_i \mathbf{Y}_{i,max} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i S_{di} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i \frac{S_{pvi}}{\omega_i} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i \frac{S_{pai}}{\omega_i^2}$$

  - Vektor maksimalnih unutrašnjih sila *i*-tog tona (ekvivalentno statičko opterećenje koje se koristi za određivanje odgovora na statičkom modelu) u osnovnom koordinatnom sistemu dobijamo transformacijom

$$\mathbf{F}_{Ei,max} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i \Gamma_i S_{pai}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - Sile određene prethodnim izrazom nazivaju se seizmičke sile *i*-tog tona i koriste se kao ekvivalentno statičko opterećenje u daljoj statičkoj analizi sistema

$$\mathbf{S}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{F}_{Ei,max} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_i \Gamma_i S_{pai}$$

  - Krajnji (ukupni) odgovor sistema kod primene spektra odgovora dobija se kombinacijom odgovora određenih za pojedine tonove. Pošto se, u opštem slučaju, maksimalne vrednosti odgovora za pojedine tonove javljaju u različitim vremenskim trenucima ukupni odgovor se određuje približno. Iz spektra odgovora ne možemo dobiti informaciju kada se javlja maksimalni odgovor
    - SRSS (eng. square root of sum of squares)
      - Pretpostavlka da su vibracije razmatranog sistema u pojedinim tonovima statistički nezavisne. Ova pretpostavka je uglavnom odgovara slučajevima kada periodi vibracija pojedinih tonova nemaju približno jednake vrednost (npr. prema EN 1998-1 $T_j \leq 0{,}9T_i$; pretpostavka $T_j \leq T_i$)

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - Ukupna smičuća sila $V_{bi}$, u osnovi konstrukcije, *i*-tog tona (tzv. bazna smičuća sila *i*-tog tona) u pravcu u kome je aplicirano ubrzanje tla jednaka je sumi svih seizmičkih sila za *i*-ti ton ($\mathbf{S}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i \Gamma_i S_{pai}$; $L_i = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M}\mathbf{s}$; $\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i}$)

$$V_{bi} = \mathbf{S}_i^T \mathbf{s} = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M}\mathbf{s} \frac{L_i}{M_i} S_{pai} = \frac{L_i^2}{M_i} S_{pai} = m_i^* S_{pai}$$

    - gde je $m_i^*$ efektivna (modalna) masa *i*-tog tona (predstavlja deo od ukupne mase dinamičkog modela koja se angažuje (učestvuje) u *i*-tom tonu)
  - Suma efektivnih masa svih tonova vibracija jednaka je ukupnoj masi dinamičkog modela

$$\sum_{j=1}^{n} m_i^* = \sum_{j=1}^{n} m_j$$

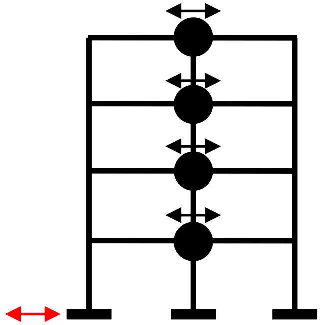
# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - Kombinovanje modalnih odgovora
    - **!!!VAŽNO PRAVILO!!!**
      - Mogu se kombinovati samo konačne veličine određene za pojedine tonove
      - Nije pravilno pomoću već kombinovanih veličina računati nove veličine
      - Postupak analize
        - Za svaki ton posebno, odrede se seizmičke sile koje deluju na konstrukciju
        - Za svaki ton posebno, apliciramo njegove seizmičke sile na konstrukciju i statičkom analizom odredimo odgovor (generalisana pomeranja i sile u presecima)
        - Na kraju, kombinujemo veličine izračunate za svaki ton posebno
      - Nije pravilno ako bismo seizmičke sile svih tonova prvo kombinovali međusobno pa tek onda određivali odgovor sistema. Na taj način se gube predznaci sila koje deluju na konstrukciju

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - **Konstrukcije visokogradnje simetrične u osnovi – ravanski model**
    - Seizmičko dejstvo u pravcu stepeni slobode kretanja masa pa je vektor $\mathbf{s} = \{\mathbf{1}\}$
    - Sledi

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i} = \frac{\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M1}}{M_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j}^2 m_j}$$



      - gde se indeks $i$ odnosi na ton, indeks $j$ na stepen slobode kretanja mase (sprat) i $n$ je broj stepeni slobode kretanja (broj spratova)
      - Kod ortonormiranih svojstvenih oblika generalisana masa ima vrednost 1
    - Sada seizmička sila *i*-tog tona i *j*-tog stepena slobode (*j*-tog sprata) glasi ($\mathbf{S}_i = \mathbf{M\Phi}_i \Gamma_i S_{pai}$)

$$S_{ij} = m_j \phi_{i,j} \Gamma_i S_{pai}$$

    - Pomeranje u *i*-tom tonu *j*-tog stepena slobode (*j*-tog sprata) glasi ($\mathbf{U}_{i,max} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i S_{di} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i \frac{S_{pvi}}{\omega_i} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i \frac{S_{pai}}{\omega_i^2}$)

$$u_{ij} = \phi_{i,j} \Gamma_i \frac{S_{pai}}{\omega_i^2} = \phi_{i,j} \Gamma_i \frac{T_i^2}{4\pi^2} S_{pai}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - **Konstrukcije visokogradnje simetrične u osnovi – ravanski sistem**
    - Efektivna (modalna) masa *i*-tog tona

$$m_i^* = \frac{L_i^2}{M_i} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j} m_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j}^2\, m_j}$$

    - Izraz $S_{ij} = m_j \phi_{i,j} \Gamma_i S_{pai}$ može da se prikaže i na sledeći način

$$S_{ij} = m_j \phi_{i,j} \overset{\Gamma_i}{\boxed{\frac{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j}^2\, m_j}}} S_{pai} = \overset{m_i^*}{\boxed{\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j} m_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j}^2\, m_j}}} \frac{\phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j}\, m_j} S_{pai}$$

    - odnosno sledi

$$S_{ij} = V_{bi} \frac{\phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^{n} \phi_{i,j}\, m_j}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja

- **Spektralna analiza odgovora**
  - **Konstrukcije visokogradnje nesimetrične u osnovi – nesimetrične zgrade**
    - Kod nesimetričnih konstrukcija javlja se torzija koja može približno da se obuhvati pomoću torzionih momenata koji se određuju kao proizvod seizmičke sile i statičke ekscentričnosti između centra krutosti i centra mase
    - Torzija može da se javi i kod simetričnih sistema zbog netačnosti u izvođenju, neravnomerne raspodele masa i različitih prinudnih pomeranja u pojedinim delovima osnove. S obzirom na to, propisima su definisani slučajni ekscentriciteti
    - Kod nesimetričnih konstrukcija transatorne i torzione vibracije su spregnute što rezultira u dinamičkim ekscentričnostima koje mogu biti mnogo veće od statičkih
    - Kod nesimetričnih sistema preporučuje se primena prostornih dinamičkih modela